

Ю. М. Коляно, Е. Г. Грицько

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ТЕЛ
ПРИ ЛОКАЛЬНОМ ИЗМЕНЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛОТДАЧИ

Рассмотрим прямоугольную полубесконечную призму $0 \leq z < \infty$, $0 \leq x \leq x_0$, $0 \leq y \leq y_0$, поверхности $x = 0$, $x = x_0$, $y = 0$, $y = y_0$ которой теплоизолированы. Через поверхность S_0 ($z = 0$) осуществляется конвективный теплообмен с внешней средой, теплофизические характеристики которой зависят от координат x , y в области Γ_0 ($\Gamma_0 \subset S_0$), на остальной части поверхности S_0 они постоянны. Тогда для определения установившегося температурного поля имеем краевую задачу

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{X=0} = \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{X=x_0} = \frac{\partial \theta}{\partial Y} \Big|_{Y=0} = \frac{\partial \theta}{\partial Y} \Big|_{Y=y_0} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Z} \Big|_{Z=0} = \text{Bi}_1 \theta|_{z=0} + \{[\text{Bi}_0(X, Y) - \text{Bi}_1] \theta|_{z=0} - \theta_0(X, Y) \text{Bi}_0(X, Y)\} \chi, \quad (3)$$

где

$$\theta = \frac{t - t_1}{t_0(0, 0) - t_1}; \quad \theta_0(X, Y) = \frac{t_0(X, Y) - t_1}{t_0(0, 0) - t_1}; \quad Z = \frac{\pi z}{x_0}; \quad X = \frac{\pi x}{x_0};$$

$$Y = \frac{\pi y}{x_0}; \quad b = \frac{\pi y_0}{x_0}; \quad \text{Bi}_1 = \frac{\alpha_1 x_0}{\lambda \pi}; \quad \text{Bi}_0(X, Y) = \frac{\alpha_0(X, Y) x_0}{\lambda \pi};$$

$$\chi = \begin{cases} 1 & \text{при } X, Y \in \Gamma_0, \\ 0 & \text{при } X, Y \notin \Gamma_0. \end{cases}$$

Здесь t — температурное поле в полубесконечной прямоугольной призме; $t_0(X, Y)$ — функция, описывающая температуру среды над областью Γ_0 ; t_1 — температура внешней среды над поверхностью S_0 за пределами Γ_0 ; λ — коэффициент теплопроводности; $\alpha_0(X, Y)$ — функция, описывающая коэффициент теплоотдачи с области Γ_0 ; α_1 — коэффициент теплоотдачи с поверхности S_0 за пределами Γ_0 .

Применяя к уравнениям (1); (3) конечное косинус-преобразование Фурье по переменным X , Y с учетом (2), получаем

$$\frac{d^2 \bar{\theta}}{dZ^2} = \gamma^2 \bar{\theta}. \quad (4)$$

$$\frac{d \bar{\theta}}{dZ} + \text{Bi}_1 \bar{\theta} = -f_0(n_x, n_y) + \iint_{\Gamma_0} [\text{Bi}_0(X, Y) - \text{Bi}_1] \theta \cos n_x X \times \\ \times \cos n_y \frac{\pi y}{b} dY dX \quad \text{при } Z = 0, \quad (5)$$

где

$$f_0(n_x, n_y) = \iint_{\Gamma_0} \text{Bi}_0(X, Y) \theta_0(X, Y) \cos n_x X \cos n_y \frac{\pi Y}{b} dX dY;$$

$$\gamma = \sqrt{n_x^2 + \frac{n_y^2 \pi^2}{b^2}}, \quad \bar{\theta} = \int_0^c \cos n_x X dX \int_0^c \theta \cos n_y \frac{\pi Y}{b} dY. \quad (6)$$

Из уравнений (4), (5) видно, что решение задачи (1) — (3) сводится к нахождению зависимости температурного поля на области Γ_0 поверхности $Z = 0$. Допустим, что с физических соображений нам известно качественное поведение температурного поля θ в области Γ_0 и его можно хорошо описать известной функцией $\psi(X, Y)$. Тогда для упрощения решения задачи тем-

пературное поле θ под знаком интеграла в выражении (5) заменим функцией

$$\theta|_{x,y \in \Gamma_0} \cong \theta_0 = D\psi(X, Y), \quad (7)$$

а для нахождения коэффициента D потребуем, чтобы между полученным вследствие замены (7) температурным полем θ_r и коэффициентом D существовала следующая связь:

$$D = \frac{1}{c} \iint_{\Gamma_0} \theta_r(X, Y) dXdY, \quad (8)$$

где $c = \iint_{\Gamma_0} \psi(X, Y) dXdY$.

Интересно отметить, что при $\psi(X, Y) = \text{const}$ постоянная совпадает с введенной в работах [2, 3] интегральной характеристикой температуры в области Γ_0 .

Решив после этого краевую задачу (4), (5) и перейдя в найденном решении к оригиналу, получим

$$\theta_r = \frac{4}{\pi b} \sum_{n_x=0}^{\infty} \sum_{n_y=0}^{\infty} S(n_x) S(n_y) [f_0(n_x, n_y) - D\psi(n_x, n_y)] \times \\ \times \varphi(Z) \cos n_x X \cos n_y \frac{\pi Y}{b}. \quad (9)$$

Здесь

$$\varphi(Z) = e^{-\gamma Z} (\gamma + Bi_1)^{-1};$$

$$\Psi(n_x, n_y) = \iint_{\Gamma_0} [Bi_0(X, Y) - Bi_1] \psi(X, Y) \cos n_x X \cos n_y \frac{\pi Y}{b} dXdY;$$

$$S(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi < 0, \\ 0,5 & \text{при } \xi = 0, \\ 1 & \text{при } \xi > 0. \end{cases}$$

Подставив равенство (9) в (8), найдем

$$D = \frac{\frac{1}{c\pi b} \sum_{n_x=0}^{\infty} \sum_{n_y=0}^{\infty} S(n_x) S(n_y) f_0(n_x, n_y) \varphi(0) \bar{x}}{1 + \frac{1}{c\pi b} \sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=0}^{\infty} S(n_x) S(n_y) \Psi(n_x, n_y) \varphi(0) \bar{x}}. \quad (10)$$

Решение (9) точно удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) и в общем случае приближенно граничному условию (3). Чтобы оценить погрешность решения (9), рассмотрим функцию $\delta\theta = \theta - \theta_r$, где θ — точное решение краевой задачи (1) — (3). Из определения $\delta\theta$ можно заключить, что для нее справедлив принцип максимума [4] для гармонических функций. Следовательно, максимального значения $|\delta\theta|$ достигает только на поверхности $Z = 0$.

Для оценки этого максимального значения рассмотрим функцию

$$V(X, Y) = \frac{\partial \theta_r}{\partial Z} - Bi_1 \theta_r - \{[Bi_0(X, Y) - Bi_1] \theta_r - \theta_0(X, Y) Bi_0(X, Y)\} X \\ \text{при } Z = 0.$$

Подставив в выражение (10) $\theta - \delta\theta$ вместо θ_r , получим

$$V(X, Y) = \frac{\partial \delta\theta}{\partial Z} - Bi_1 \delta\theta - [Bi_0(X, Y) - Bi_1] \delta\theta X \text{ при } Z = 0.$$

Учитывая, что в точке максимального значения $|\delta\theta|$ производная по внешней нормали к поверхности S_0 $\partial\delta\theta/\partial n$ и $\delta\theta$ одного знака, заключаем, что с

помощью функции $V(X, Y)$ можно оценить максимальную погрешность при определении температурного поля.

Рассмотрим пример. Пусть Γ_0 — прямоугольник $0 \leq X \leq \varepsilon_x$ и $0 \leq Y \leq \varepsilon_y$; $Bi_0(X, Y)$ и $\theta_0(X, Y)$ постоянны, т. е. $Bi_0(X, Y) \equiv B_0$, $\theta_0(X, Y) \equiv 1$. Функцию $\psi(X, Y)$ выберем в виде

$$\psi(X, Y) = \cos p_x X \frac{\pi}{\varepsilon_x} \cos p_y Y \frac{\pi}{\varepsilon_y},$$

где p_x, p_y — параметры, предназначенные для частичного управления поведением функции $\psi(X, Y)$ в области Γ_0 . Тогда $f_0(n_x, n_y)$, $\Psi(n_x, n_y)$, $c, \bar{\chi}$

	X		0,1	0,2	0,27	0,3
	$\begin{array}{c} Y \\ \backslash \\ X \end{array}$					
	Y	0,219 0,245	0,212 0,226	0,187 0,175	0,154 0,128	0,128 0,107
0,27	0 0,1 0,2 0,27 0,3	— 0,236 0,207 0,177 0,162	0,215 — 0,199 0,170 0,156	0,202 0,199 — 0,150 0,137	0,181 0,178 0,168 — 0,117	0,162 0,159 0,151 0,138 —
	$\begin{array}{c} Y \\ \backslash \\ X \end{array}$					
	Y	0,221 0,226	0,213 0,214	0,187 0,181	0,153 0,149	0,127 0,134
0,22	0,0 0,1 0,2 0,27 0,3	— 0,220 0,202 0,183 0,174	0,217 — 0,197 0,179 0,169	0,202 0,199 — 0,164 0,156	0,181 0,178 0,168 — 0,141	0,162 0,159 0,150 0,138 —
	$\begin{array}{c} Y \\ \backslash \\ X \end{array}$					
	X	0,222 0,212	0,213 0,205	0,187 0,186	0,153 0,166	0,127 0,157
0,17	0,0 0,1 0,2 0,27 0,3	— 0,208 0,198 0,188 0,182	0,217 — 0,195 0,185 0,179	0,203 0,199 — 0,176 0,171	0,181 0,178 0,168 — 0,162	0,162 0,159 0,150 0,138 —

в выражениях (8), (9) примут вид

$$f_0(n_x, n_y) = B_0 \bar{\chi}, \quad \Psi(n_x, n_y) = \frac{B_0 - Bi_1}{4} (S_x^+ + S_x^-) (S_y^+ + S_y^-),$$

$$c = \frac{\varepsilon_x \sin p_x \pi}{p_x \pi} \frac{\varepsilon_y \sin p_y \pi}{p_y \pi}, \quad \bar{\chi} = \frac{\sin \varepsilon_x n_x}{n_x} \frac{\sin n_y \frac{\pi \varepsilon_y}{b}}{\frac{n_y \pi}{b}},$$

где

$$S_\xi^\pm = \frac{\sin(p_\xi^1 \pm n_\xi^1) \varepsilon_\xi}{p_\xi^1 \pm n_\xi^1}; \quad p_\xi^1 = \frac{p_\xi \pi}{\varepsilon_\xi}; \quad n_x^1 = n_x; \quad n_y^1 = \frac{n_y \pi}{b}.$$

По формулам (8), (9) для рассмотренного примера проведены расчеты температурного поля при $B_0 = 0,7$, $Bi_1 = 0,1$, $b = \pi$, $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon$, $p_x = p_y = p$, результаты которых для $\varepsilon = 0,3$ представлены на рис. 1—3 и в таблице. Кривые на этих рисунках рассчитаны при $p = 0,217$.

Отметим, что при таких граничных условиях температурное поле θ_r и функция $\psi(X, Y)$ получаются симметричными функциями относительно координат X, Y , т. е. $\theta_r(X, Y, Z) = \theta_r(Y, X, Z)$, $\psi(X, Y) = \psi(Y, X)$.

На рис. 1 приведена зависимость температурного поля от координат X, Y на поверхности $Z = 0$. Здесь кривые 1—7 соответствуют значениям $\theta_r = 0,215; 0,2; 0,16; 0,1; 0,065; 0,05; 0,047$. На рис. 2 показано поведение температурного поля при изменении координаты Z , причем кривые 1—5 со-

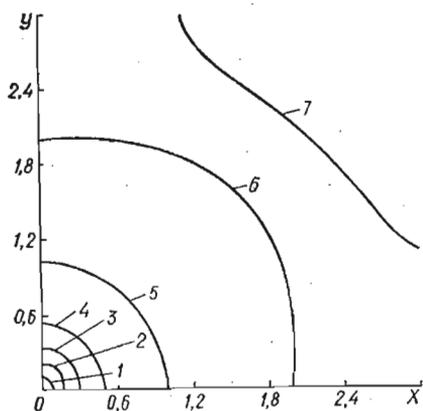


Рис. 1

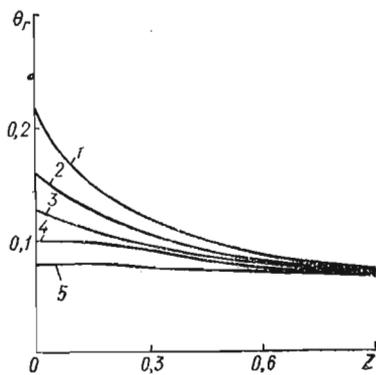


Рис. 2

ответствуют таким координатам: $X = Y = 0$; $X = 0, Y = 0,3$; $X = Y = 0,3$; $X = 0,5, Y = 0$; $X = Y = 0,5$. На рис. 3 представлена зависимость $\delta\theta_r = \theta_r - D\psi(X, Y)$ при изменении параметра ρ , причем кривые 1—5 рассчитаны соответственно при $X = Y = 0; 0,1; 0,2; 0,27; 0,3$.

В таблице представлены результаты расчетов температурного поля и функции $D\psi(X, Y)$ в области локального термического воздействия при изменении координат X, Y и параметра ρ . Таблица состоит из трех частей, соответствующих трем различным значениям ρ . В верхнем треугольнике каждой части ($X > Y$) приведены значения температурного поля, в нижнем ($X < Y$) — функции $D\psi(X, Y)$. Значения θ_r и $D\psi(X, Y)$ при $X = Y$ вынесены в первые две строки каждой части, причем в верхней строке помещены значения θ_r , в нижней — $D\psi(X, Y)$.

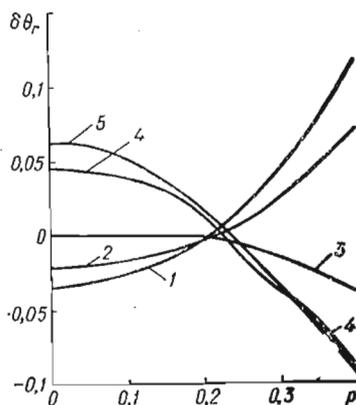


Рис. 3

Проведенные исследования показали, что для каждого значения ϵ существует оптимальное значение параметра $\rho = \rho_0$, которое минимизирует ошибку в определении температурного поля, причем поведение ρ_0 при изменении ϵ в интервале $0,1 \leq \epsilon \leq 1$ можно описать зависимостью $\rho_0 = 0,24 - 0,07\epsilon$.

1. Снеддон И. Преобразования Фурье.— М.: Изд-во иностр. лит., 1955.— 668 с.
2. Коляно Ю. М., Грицько Е. Г. Узкозонный нагрев тел.— ФХОМ, 1977, № 3, с. 149—152.
3. Коляно Ю. М., Грицько Е. Г. Температурное поле в массивных телах при смешанных граничных условиях.— Докл. АН УССР. Сер. А., 1977, № 2, с. 132—136.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1966.— 724 с.