1. *Игначак Ю., Новацкий В.* Два случая разрывного температурного поля в упругом пространстве и полупространстве.— Bull. Akad. pol. sci., 1958, 4, N 6, p. 81—92.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М.: Наука, 1966.—708 с.
3. *Шерман Д. Ш.* Об одной задаче теории упругости.— Докл. АН СССР, 1940, 27, № 9, с. 907—910.
4. *Goodier I. N.* On the integration of the thermo elastic eguations.— Phil. Mag., 1937, 7, N 23, p. 1017—1032.
5. *Hiecke M.* Über ein ebenes unstetiges Temperaturspannungsproblems.— Zeits. Angew. Math. Mech., 1954, 39, s. 25—32.
6. *Mindlin R. D., Cooper M. L.* Thermoelastic stress around a cylindrical inclusion of elliptic cross section.— J. Appl. Mech., 1960, 17, p. 265—275.
7. *Myklstad N. O.* Two problems of thermal stress in the infinite-Solid.— J. Appl. Mech., 1942, p. 136—151.
8. *Richardson M. K.* Interference stresses in a half plane containing an elastic disk of the same material.— Trans. ASME. Ser. E.— J. Appl. Mech., 1969, 36, N 1, Рус. пер.: Тр. Амер. о-ва инж.-механ. Сер. Е, 1969, 36, № 1, с. 122—126.
9. *Sen B.* Note on the stresses produced by nycki of thermoelastic strarin a semi-infinite elastic solid.— Quart Appl. Math., 1957, 8, p. 365—380.

г. Москва Поступила в редколлегию 22.10.79

УДК 536.12 : 539.377

В. М. Вигак, А. М. Ригин

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В МНОГОСЛОЙНОМ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ ЦИЛИНДРЕ

Квазистатическая задача термоупругости для кусочно-однородного цилиндра рассматривалась в работах [3, 4] для различных частных случаев функции распределения температурных полей. Однако для определения оптимального управления тепловыми процессами в кусочно-однородных деталях и элементах конструкций методом решения обратной задачи теплопроводности по заданным термонапряжениям, как и в случае однородного тела [1], необходима функциональная зависимость термоупругих напряжений от температурного поля.

В настоящей работе приведены решения одномерной задачи теплопроводности и соответствующей ей задачи термоупругости для полого кусочно-однородного многослойного цилиндра. Полученные формулы позволяют определять термонапряженное состояние такого цилиндра при произвольном температурном поле, а также могут быть использованы для решения задач оптимального по быстродействию управления тепловыми процессами в многослойном цилиндре при ограничении на термоупругие напряжения.

Рассмотрим полый многослойный цилиндр с внутренним и наружным радиусами R_1 и R_2, изготовленный из произвольного числа n концентрических однородных слоев. Материал каждого слоя изотропный, а теплофизические и механические характеристики такого цилиндра представляются в виде [4]

$$p(r) = p_1 + \sum_{i=1}^{n-1} S_+(r - r_j)(p_{j+1} - p_i), \tag{1}$$

где r_j — внешний радиус j-го слоя;

$$S_+(r - r_j) = \begin{cases} 0, & r \leqslant r_j, \\ 1, & r > r_j. \end{cases}$$

Между слоями осуществляется идеальный тепловой и механический контакт.

При конвективном теплообмене между цилиндром и окружающей средой осесимметричное температурное поле $T(\rho, \tau)$ можно найти из решения задачи теплопроводности

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\eta(\rho)\frac{\partial T(\rho,\tau)}{\partial\rho}\right]+F(\rho,\tau)=\varkappa(\rho)\frac{\partial T(\rho,\tau)}{\partial\tau}, \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial T(k,\tau)}{\partial\rho}-H_1[T(k,\tau)-\theta(\tau)]=0,\\ \frac{\partial T(1,\tau)}{\partial\rho}+H_2[T(1,\tau)-t(\tau)]=0.\end{gathered} \tag{3}$$

$$T(\rho,0)=f(\rho), \tag{4}$$

где $\rho=r/R_2$; $\tau=a_1\tau^*/R_2^2$; функции $\eta(\rho)=\lambda^{т}(\rho)/\lambda_1^{т}$, $\varkappa(\rho)=c(\rho)\gamma(\rho)/c_1\gamma_1$ имеют вид (1); $\lambda_j^{т}$, a_j, c_j, γ_j $(j=1,2,\ldots,n)$ — соответственно коэффициенты теплопроводности, температуропроводности, удельной теплоемкости и плотности j-го слоя; $F(\rho,\tau)=R_2^2W(\rho,\tau)/\lambda_1^{т}$; $W(\rho,\tau)$ — удельная мощность тепловых источников; $H_1=\alpha_1R_2/\lambda_1^{т}$; $H_2=\alpha_2R_2/\lambda_n^{т}$; α_1, α_2 — коэффициенты теплообмена; $\theta(\tau)$, $t(\tau)$ — температуры греющих сред; $k=R_1/R_2$.

Применяя последовательно метод преобразования Лапласа и метод решения дифференциального уравнения второго порядка, предложенный в работе [2], решение задачи теплопроводности (2) — (4), можно представить в виде

$$T(\rho,\tau)=\int_0^{\tau}\int_k^1\xi[F(\xi,\eta)+\varkappa(\xi)f(\xi)\delta(\eta)-H_1\theta(\eta)\delta(\xi-k)+$$
$$+H_2t(\eta)\delta(\xi-1)]G(\rho,\xi,\tau,\eta)\,d\xi d\eta.$$

Здесь $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака; $G(\rho,\xi,\tau,\eta)$ — функция Грина вида

$$G(\rho,\xi,\tau,\eta)=-\pi\sum_{m=1}^{\infty}A_mU(\rho,\nu_m)V(\xi,\nu_m)\exp[-\nu_m^2(\tau-\eta)];$$

A_m, $U(\rho,\nu_m)$, $V(\xi,\nu_m)$ — известные коэффициенты и функции; ν_m $(m=1,2,3,\ldots)$ — счетное множество простых корней уравнения

$$\left[\frac{d\varphi_{n,1}(1,\nu)}{d\rho}+H_2\varphi_{n,1}(1,\nu)\right][\nu Y_1(k\nu)+H_1Y_0(k\nu)]-$$
$$-\left[\frac{d\varphi_{n,2}(1,\nu)}{d\rho}+H_2\varphi_{n,2}(1,\nu)\right][\nu I_1(k\nu)+H_1I_0(k\nu)]=0;$$

$I_i(x)$, $Y_i(x)$ $(i=0,1)$ — функции Бесселя первого и второго рода нулевого и первого порядков; $\varphi_{n,i}(\rho,\nu)$ $(i=1,2)$ — известные функции, выражающиеся через функции $I_0(\rho,\nu)$, $Y_0(\rho,\nu)$.

Теперь рассмотрим решение задачи термоупругости для полого многослойного цилиндра, находящегося под действием температурного поля $T(\rho,\tau)$. Примем, что внутренняя и наружная поверхности цилиндра свободны от внешних нагрузок, а торцевые поверхности закреплены от осевых перемещений. Тогда в цилиндре возникает плоская осесимметричная деформация. Для определения термонапряженного состояния его используем уравнение равновесия, записанное в перемещениях [5]:

$$\frac{d}{d\rho}\left\{[2\mu(\rho)+\lambda(\rho)]\frac{du_r}{d\rho}\right\}+\frac{d}{d\rho}\left[\frac{\lambda(\rho)}{\rho}u_r\right]+2\mu(\rho)\left[\frac{1}{\rho}\frac{du_r}{d\rho}-\frac{u_r}{\rho^2}\right]=$$
$$=R_2\frac{d}{d\rho}[\beta(\rho)T(\rho,\tau)], \tag{5}$$

где u_r — радиальное перемещение; $\lambda(\rho)$, $\mu(\rho)$ — коэффициенты Ляме; $\beta(\rho)=[3\lambda(\rho)+2\mu(\rho)]\alpha^{т}(\rho)$; $\alpha^{т}(\rho)$ — температурный коэффициент линейного расширения; функции $\lambda(\rho)$, $\mu(\rho)$, $\beta(\rho)$, $\alpha^{т}(\rho)$ имеют вид (1).

При решении уравнения (5) применяем упомянутый выше метод [2]. Используя при этом соотношения закона Гука и граничные условия $\sigma_r(k)=$

$= \sigma_\rho (1) = 0$ для определения постоянных интегрирования, находим

$$\sigma_\rho = \frac{1}{2(2\mu_1 + \lambda_1)} \{[\mu_1 Q_1(\rho) k^{-2} + (\mu_1 + \lambda_1) Q_2(\rho)] R + \\ + Q_2(\rho) T_1(\rho, \tau) - Q_1(\rho) T_2(\rho, \tau)\}, \tag{6}$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2(2\mu_1 + \lambda_1)} \{[\mu_1 G_1(\rho) k^{-2} + (\mu_1 + \lambda_1) G_2(\rho)] R + \\ + G_2(\rho) T_1(\rho, \tau) - G_1(\rho) T_2(\rho, \tau)\} - \frac{2\mu(\rho)\beta(\rho)}{2\mu(\rho) + \lambda(\rho)} T(\rho, \tau), \tag{7}$$

$$\sigma_z = \frac{1}{2(2\mu_1 + \lambda_1)} \{[\mu_1 P_1(\rho) k^{-2} + (\mu_1 + \lambda_1) P_2(\rho)] R + \\ + P_2(\rho) T_1(\rho, \tau) - P_1(\rho) T_2(\rho, \tau)\} - \frac{2\mu(\rho)\beta(\rho)}{2\mu(\rho) + \lambda(\rho)} T(\rho, \tau), \tag{8}$$

где σ_ρ — радиальное, σ_θ — окружное, σ_z — аксиальное напряжения;

$$Q_i(\rho) = [2\mu(\rho) + \lambda(\rho)] \frac{d\varphi_i(\rho)}{d\rho} + \frac{\lambda(\rho)}{\rho} \varphi_i(\rho);$$

$$G_i(\rho) = [2\mu(\rho) + \lambda(\rho)] \frac{\varphi_i(\rho)}{\rho} + \lambda(\rho) \frac{d\varphi_i(\rho)}{d\rho};$$

$$P_i(\rho) = \frac{\varphi_i(\rho)}{\rho} + \frac{d\varphi_i(\rho)}{d\rho};$$

$$T_i(\varphi, \tau) = \int_k^\rho \beta(\xi) T(\xi, \tau) \frac{d}{d\xi} [\xi \varphi_i(\xi)] d\xi \qquad (i = 1, 2);$$

$$R = \frac{Q_1(1) T_2(1, \tau) - Q_2(1) T_1(1, \tau)}{\mu_1 Q_1(1) k^{-2} + (\mu_1 + \lambda_1) Q_2(1)};$$

$\varphi_i(\rho)$ $(i = 1, 2)$ — фундаментальная система решений уравнения (5), которая имеет вид

$$\varphi_1(\rho) = \rho - \sum_{i=1}^{n-1} S_+(\rho - \rho_i)(\rho - \rho^{-1}\rho_i^2) a_{i+1},$$

$$\varphi_2(\rho) = \rho^{-1} + \sum_{i=1}^{n-1} S_+(\rho - \rho_i)(\rho - \rho^{-1}\rho_i^2) b_{i+1},$$

$$a_j = c_j - \sum_{i=2}^{j-1} a_i (c_j + d_j \rho_{i-1}^2); \quad b_j = d_j - \sum_{i=2}^{j-1} b_i (c_j + d_j \rho_{i-1}^2),$$

$$c_j = \frac{\mu_j + \lambda_j - (\mu_{j-1} + \lambda_{j-1})}{2\mu_j + \lambda_j}, \quad d_j = \frac{(\mu_j - \mu_{j-1}) \rho_{j-1}^{-2}}{2\mu_j + \lambda_j}$$

$$(j = 2, 3, \ldots, n).$$

Для практики большой интерес представляет случай свободных торцов цилиндра, когда величина осевой деформации ε_z постоянна. Тогда можно воспользоваться основными соотношениями для обобщенной плоской деформации. В этом случае в уравнении (5) к правой части следует прибавить член $-R_2 \frac{d\lambda(\rho)}{d\rho} \varepsilon_z$. Соответствующие изменения появятся и в формулах (6)—(8). При этом величина осевой деформации ε_z определяется из условия равенства нулю равнодействующей силы на торцах, т. е. из условия

$$\int_k^1 \rho \sigma_z(\rho, \tau) d\rho = 0.$$

Исследуем термонапряженное состояние полого двухслойного ($n = 2$) цилиндра со свободными торцами. Для этого цилиндра можно найти, что компоненты напряженного состояния выражаются следующими формулами:

для внутреннего слоя ($\rho \in [k, k_1)$)

$$\sigma_r = \frac{\alpha_1^T E_1}{1-\nu_1}\rho^{-2}\left[\frac{\rho^2-k^2}{k_1^2-k^2}\int_k^{k_1}\rho T(\rho, \tau)\,d\rho - \int_k^{\rho}\xi T(\xi, \tau)\,d\xi\right] +$$

$$+\frac{\rho^{-2}}{\delta}E_1E_2(\rho^2-k^2)(1-k_1^2)k_1^2[\Delta T^* + \varepsilon_z(\nu_1-\nu_2)],$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha_1^T E_1}{1-\nu_1}\rho^{-2}\left[\frac{\rho^2+k^2}{k_1^2-k^2}\int_k^{k_1}\rho T(\rho, \tau)\,d\rho + \int_k^{\rho}\xi T(\xi, \tau)\,d\xi - \rho^2 T(\rho, \tau)\right] +$$

$$+\frac{\rho^{-2}}{\delta}E_1E_2(\rho^2+k^2)(1-k_1^2)k_1^2[\Delta T^* + \varepsilon_z(\nu_1-\nu_2)],$$

$$\sigma_z = \frac{\alpha_1^T E}{1+\nu_1}\left[\frac{2\nu_1}{k_1^2-k^2}\int_k^{k_1}\rho T(\rho, \tau)\,d\rho - T(\rho, \tau)\right] +$$

$$+\frac{2\nu_1}{\delta}E_1E_2(1-k_1^2)k_1^2[\Delta T^* + \varepsilon_z(\nu_1-\nu_2)] + E_1\varepsilon_z,$$

для наружного слоя ($\rho \in (k_1, 1]$)

$$\sigma_r = \frac{\alpha_2^T E_2}{1-\nu_2}\rho^{-2}\left[\frac{\rho^2-k_1^2}{1-k_1^2}\int_{k_1}^{1}\rho T(\rho, \tau)\,d\rho - \int_{k_1}^{\rho}\xi T(\xi, \tau)\,d\xi\right] +$$

$$+\frac{\rho^{-2}}{\delta}E_1E_2(1-\rho^2)(k_1^2-k^2)k_1^2[\Delta T^* + \varepsilon_z(\nu_1-\nu_2)],$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha_2^T E_2}{1-\nu_2}\rho^{-2}\left[\frac{\rho^2+k_1^2}{1-k_1^2}\int_{k_1}^{1}\rho T(\rho, \tau)\,d\rho + \int_{k_1}^{\rho}\xi T(\xi, \tau)\,d\xi - \rho^2 T(\rho, \tau)\right] -$$

$$-\frac{\rho^{-2}}{\delta}E_1E_2(1+\rho^2)(k_1^2-k^2)k_1^2[\Delta T^* + \varepsilon_z(\nu_1-\nu_2)],$$

$$\sigma_z = \frac{\alpha_2^T E_2}{1-\nu_2}\left[\frac{2\nu_2}{1-k_1^2}\int_{k_1}^{1}\rho T(\rho, \tau)\,d\rho - T(\rho, \tau)\right] -$$

$$-\frac{2\nu_2}{\delta}E_1E_2(k_1^2-k^2)k_1^2[\Delta T^* + \varepsilon_z(\nu_1-\nu_2)] + E_2\varepsilon_z,$$

где ν_i, E_i ($i = 1,2$) — соответственно коэффициент Пуассона и модуль упругости i-го слоя;

$$\Delta T^* = \alpha_2^T(1+\nu_2)T_2^* - \alpha_1^T(1+\nu_1)T_1^*;$$

$$T_1^* = \frac{2}{k_1^2-k^2}\int_k^{k_1}\rho T(\rho, \tau)\,d\rho; \quad T_2^* = \frac{2}{1-k_1^2}\int_{k_1}^{1}\rho T(\rho, \tau)\,d\rho;$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{\delta^*}\Big\{\alpha_1E_1[(k_1^2(1-2\nu_2)+1)(1+\nu_2)E_1(k_1^2-k^2) +$$

$$+(k_1^2(1-2\nu_2)+k^2)(1+\nu_1)E_2(1-k_1^2)]\int_k^{k_1}\rho T(\rho, \tau)\,d\rho +$$

$$+\alpha_2E_2[(k_1^2(1-2\nu_1)+k^2)(1+\nu_1)E_2(1-k_1^2) +$$

$$+(k_1^2(1-2\nu_1)+1)(1+\nu_2)E_1(k_1^2-k^2)]\int_{k_1}^{1}\rho T(\rho, \tau)\,d\rho\Big\};$$

$$\delta = [k^2 + (1-2\nu_1)k_1^2]E_2(1+\nu_1)(1-k_1^2) +$$

$$+ [1 + (1 - 2\nu_1) k_1^2] E_1 (1 + \nu_2)(k_1^2 - k^2);$$

$$\delta^* = E_1 E_2 k_1^2 (1 - k_1^2)(k_1^2 - k^2)(\nu_1 - \nu_2)^2 + \frac{\delta}{2} [(k_1^2 - k^2) E_1 + (1 - k_1^2) E_2].$$

В отличие от однородного термонапряженное состояние двухслойного цилиндра характеризуется, кроме градиентных напряжений, еще наличием напряжений, которые вызываются различием механических свойств и разностью средних интегральных температур слоев.

В качестве примера рассмотрим теплоизолированную снаружи двухслойную трубу 1020×82 (76 мм ст. 22 К и 6 мм ст.0Х1810Т), нагреваемую конвективным теплообменом изнутри по линейному закону ($H_1 = 20$, $v = 4°$ С/мин). Тогда решение задачи теплопроводности (2) — (4) можно представить в виде

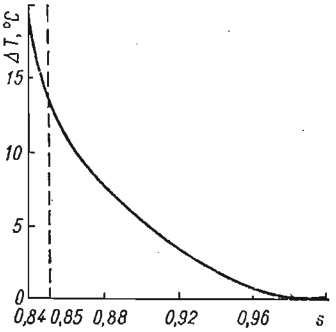

Рис. 1

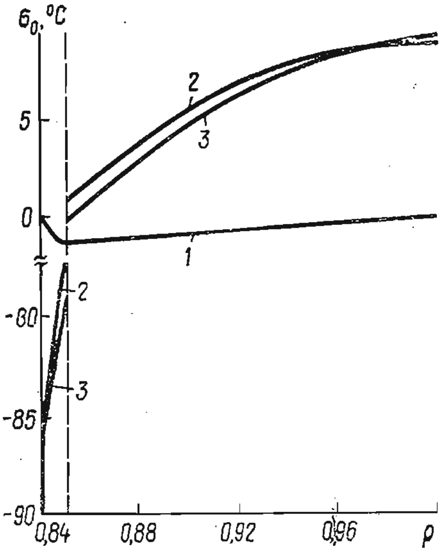

Рис. 2

$$T(\rho, \tau) = T_0(\rho) + T_1(\rho)\tau + T^*(\rho, \tau). \tag{9}$$

Рассмотрим термонапряженное состояние трубы для установившегося теплового режима, когда последним слагаемым в выражении (9) можно пренебречь. Результаты расчета представлены на рис. 1, 2. На рис. 1 приведен перепад температур по толщине трубы, на рис. 2 показано распределение относительных термоупругих напряжений $\sigma_0 = \frac{(1 - \nu_1)\sigma}{\alpha_1^T E_1}$, где цифрами обозначены: *1* — радиальные, *2* — окружные, *3* — аксиальные напряжения для случая свободных торцов трубы.

1. *Вигак В. М.* Оптимальное управление нестационарными температурными режимами.— Киев : Наук. думка, 1979.— 360 с.
2. *Вігак В. М.* Про побудову розв'язку рівняння теплопровідності для кусково-однорідного тіла.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1980, № 1, с. 29—31.
3. *Коляно Ю. М.* Применение обобщенных функций в термомеханике кусочно-однородных тел.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 7, с. 7—11.
4. *Коляно Ю. М., Процюк Б. В.* Термопружність багатошарового циліндра.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1976, № 8, с. 718—721.
5. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1976.— 368 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
16.08.80