

На основе изложенного можно утверждать следующий важный для практики результат.

**Теорема.** На первом листе римановой поверхности  $\text{Im } \lambda_{1,2} > 0$  в полуплоскости  $\text{Im } \chi > 0$  независимо от того, выполняется неравенство (6) или нет, а  $\text{Re } \lambda_{1,2} \geq 0$  при  $\text{Re } \chi \geq 0$ .

В случае  $M = 0$  аналогичное утверждение доказано в работе [3]. Отметим, что в работе [1] доказана первая часть теоремы в случае бесконечной скорости распространения тепла  $M = 0$  при  $\text{Im } \chi > \text{Im } \chi_{\pm}$ .

1. Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелайшвили М. О., Бурчуладзе Т. В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости.— М.: Наука, 1976.— 664 с.
2. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов.— М.: Мир, 1974.— 324 с.
3. Мокрик Р. И., Пырьев Ю. А. Динамические свойства решений задач термоупругости.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 4, с. 42—45.
4. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Обобщенная термомеханика.— Киев: Наук. думка, 1976.— 312 с.
5. Davies B. Integral transforms and their applications.— New York: Springer, 1978.— 410 p.

Львовский университет  
Институт прикладных проблем  
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию  
22.10.79

УДК 539.377

Б. С. Воробец

**ДИНАМИЧЕСКИЕ ТЕРМОНАПРЯЖЕНИЯ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ,  
ВЫЗЫВАЕМЫЕ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ В СФЕРИЧЕСКОМ ВКЛЮЧЕНИИ  
ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА**

**Постановка задачи.** Рассмотрим упругое полупространство  $z \geq 0$ , отнесенное к цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  (рисунок). На внешней поверхности полупространства  $z = 0$  происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial z} - \varepsilon_c t = 0. \quad (1)$$

где  $t$  — температура;  $\lambda, \varepsilon_c$  — коэффициенты теплопроводности и теплоотдачи; температуру внешней среды полагаем равной нулю. Поверхность  $z = 0$  свободна от внешних нагрузок:

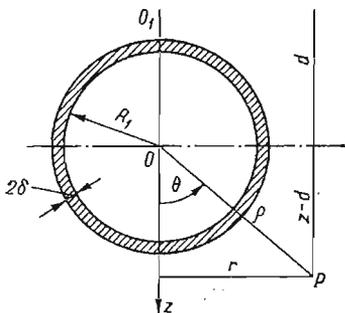
$$\sigma_{zz} = \sigma_{rz} = 0. \quad (2)$$

В полупространстве на расстоянии  $d$  от плоской поверхности  $z = 0$  расположена упругая сферическая оболочка, внутри которой имеется теплопроводный наполнитель с равномерно распределенными источниками тепла

$$q(\tau) = q_1 \exp(i\omega\tau), \quad \omega, q_1 = \text{const}, \quad (3)$$

( $\tau$  — время). На контактирующих поверхностях (полупространство — оболочка, оболочка — включение) выполняются условия идеального теплового и механического контактов. При таких условиях и распределении источников тепла (3) термоупругое состояние системы не будет зависеть от координаты  $\varphi$ .

Введем сферическую систему координат  $\rho, \varphi, \theta$  (см. рисунок). Считаем материал включения «мягким» (жесткость включения мала по сравнению с жесткостью полупространства и оболочки). Тогда, используя результаты



работ [2, 3], граничные условия на поверхности включения  $\rho = R_1$  в рассматриваемом случае с учетом соотношения (3) записываем в виде \*

$$\frac{\partial t}{\partial \rho} + \frac{1}{R_1} \left\{ \lambda^{(0)} k_* (1 - k_*) \left( \frac{\partial^2 t}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial t}{\partial \theta} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{3} [3k_* (1 - k_*) c^{(0)} + (1 - 2k_*) c^{(1)}] \frac{R_1^2}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau} \right\} = - \frac{(1 - 2k_*) q_1 R_1}{3\lambda} e^{i\omega\tau}; \quad (4)$$

$$\sigma_{\rho\rho} + \frac{1}{R_1^2} \left[ \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (2M_\theta - M_\varphi) - (M_\theta - M_\varphi) \right] - \frac{1}{R_1} (N_\theta - N_\varphi) - \\ - g^{(0)} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2} - g_*^{(0)} \frac{1}{R_1^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left[ \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) - \left( \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + u_0 \operatorname{ctg} \theta \right) \right] = 0, \quad (5)$$

$$\sigma_{\theta\theta} + \frac{1}{R_1^2} \left[ \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + (M_\theta - M_\varphi) \operatorname{ctg} \theta \right] + \frac{1}{R_1} \left[ \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + (N_\theta - N_\varphi) \operatorname{ctg} \theta \right] - \\ - g^{(0)} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} - g_*^{(0)} \frac{1}{R_1^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - u_0 \right) = 0, \quad \vec{u}_0 = \vec{u}.$$

В соотношениях (4), (5) обозначено:

$$\sigma_{lm} = 2G \{ e_{lm} + (1 - 2\nu)^{-1} [\nu e - (1 + \nu) \alpha^{(l)} t] \delta_{lm} \} \quad (l, m = \rho, \varphi, \theta; r, \varphi, z); \quad (6)$$

$$N_\theta = D_0 [\varepsilon_\theta + \nu_0 \varepsilon_\varphi - \alpha_0^{(l)} (1 + \nu_0) T_0], \quad N_\varphi = D_0 [\varepsilon_\varphi + \nu_0 \varepsilon_\theta - \alpha_0^{(l)} (1 + \nu_0) T_0], \quad (7)$$

$$M_\theta = D_0^* [\kappa_\theta + \nu_0 \kappa_\varphi - \alpha_0^{(l)} \delta_0^{-1} (1 + \nu_0) T_0^*]; \quad M_\varphi = D_0^* [\kappa_\varphi + \nu_0 \kappa_\theta - \\ - \alpha_0^{(l)} \delta_0^{-1} (1 + \nu_0) T_0^*];$$

$$T_0 = \left( 1 - \frac{1}{6} k_* \frac{c^{(1)}}{\lambda^{(0)}} \frac{R_1^2}{a} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) t + \frac{k_* q_1 R_1}{6\lambda_0} e^{i\omega\tau}, \quad T_0^* = t - T_0, \quad k_* = 2\delta_0 R_1^{-1},$$

$$D_0 = 2E_0 \delta_0 (1 - \nu_0^2)^{-1}, \quad D_0^* = \frac{1}{3} \delta_0^2 D_0, \quad g^{(0)} = 2\delta_0 g_0, \quad g_*^{(0)} = \\ = \frac{1}{3} \delta_0^2 g^{(0)}, \quad \lambda_0 = \lambda \lambda^{(0)}, \quad c_j = c c^{(j)}.$$

Здесь  $e_{lm}$  — компоненты деформации полупространства;  $\delta_{lm}$  — символ Кронекера;  $e$  — объемное расширение;  $\varepsilon_\theta, \varepsilon_\varphi, \kappa_\theta$  и  $\kappa_\varphi$  — компоненты деформации срединной поверхности оболочки;  $u_0, w_0$  — компоненты вектора перемещений  $\vec{u}_0$  срединной поверхности оболочки;  $2\delta_0$  — толщина оболочки;  $E, G$  — модули Юнга и сдвига соответственно;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $c$  — теплоемкость;  $g$  — плотность материала;  $a, \alpha^{(l)}$  — коэффициенты теплопроводности и линейного температурного расширения соответственно. Здесь и в дальнейшем величины с нижними индексами «0», «1» будем относить к оболочке и включению соответственно, а без индекса — к полупространству.

Таким образом, для определения температурного поля описанной системы необходимо найти решение уравнения теплопроводности

$$\Delta t = \frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau}, \quad (8)$$

удовлетворяющее условиям (1), (4), а для определения ее напряженно-деформированного состояния, обусловленного этим температурным полем,

\* В работах [2, 3] задачи теплопроводности и термоупругости для тел с инородными включениями сведены к соответствующим крайевым задачам для области, занятой основным материалом при обобщенных граничных условиях (отражающих роль включений) на внутренних поверхностях. Простейшие варианты таких условий используются в данной работе.

необходимо решить уравнение движения

$$\Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad div } \vec{u} = \frac{g}{G} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha^{(t)} \text{grad } t \quad (9)$$

при условиях (2), (5). Здесь  $\Delta$  — оператор Лапласа.

**О методе решения.** Задачу будем решать методом последовательных приближений, предложенным в работах [4—6]. Процесс вычислений проводим так. Каждое приближение удовлетворяет дифференциальным уравнениям задачи (8), (9). При этом  $(2n)$ -е приближение точно удовлетворяет граничным условиям (4), (5) на сферической поверхности  $\rho = R_1$ , а  $(2n+1)$ -е — условиям (1), (2) на плоской границе. На каждом этапе вычислений приближения записываем соответственно в сферической и цилиндрической системах координат.

Представим вектор перемещений  $\vec{u}$  в виде

$$\vec{u} = \text{grad } \Phi - \text{rot rot } \vec{\Psi}, \quad (10)$$

где  $\Phi$ ,  $\vec{\Psi}$  — соответственно скалярный и векторный потенциалы [1]. Подставив выражение (10) в уравнение (9), получим

$$\left( \Delta - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \Phi = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha^{(t)} t, \quad \left( \Delta - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \vec{\Psi} = 0, \quad (11)$$

$$\alpha^2 = E(1-\nu)[(1+\nu)(1-2\nu)g]^{-1}, \quad \beta^2 = E[2(1+\nu)g]^{-1},$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  — скорости распространения упругих волн расширения и искажения. Все величины, характеризующие термонапряженное состояние системы, определяются через функции  $\Phi$ ,  $\vec{\Psi}$  и их производные [1].

При установившихся процессах, обусловленных источниками тепла (3), время будет входить в функции  $\Phi$ ,  $\vec{\Psi}$  и  $t$  в виде множителя  $\exp(i\omega t)$ . Этот множитель в дальнейшем условимся опускать; он появляется лишь в конце вычислений и на него необходимо будет умножить все компоненты, определяющие термоупругое состояние системы.

Представим потенциал  $\Phi$  в виде  $\Phi = F + H$ . Тогда, используя уравнение теплопроводности (8), с учетом сказанного соотношения (11) приводим к таким уравнениям на функции  $F$ ,  $H$  и  $\Psi$ :

$$(\Delta + m_1^2) F = 0, \quad (\Delta + m_2^2) H = 0, \quad (\Delta + m_3^2) \Psi = 0, \quad (12)$$

$m_1^2 = -i\lambda\kappa R_1^{-2}$ ,  $m_2^2 = \chi^2 R_1^{-2}$ ,  $m_3^2 = \eta^2 m_2^2$ ,  $\eta = \alpha\beta^{-1}$ ,  $\chi = \omega R_1 \alpha^{-1}$ ,  $l = \alpha R_1 a^{-1}$ , причем температурное поле полупространства  $t$  определяется через эти функции формулой

$$t = (1-\nu)[\alpha^{(t)}(1+\nu)]^{-1}(\Delta + m_2^2)(F + H). \quad (13)$$

Второе (векторное) уравнение (11) переходит в последнее из уравнений (12), так как ввиду осесимметричности задачи вектор  $\vec{\Psi}$  будет иметь отличную от нуля лишь осевую составляющую.

Искомые функции  $F$ ,  $H$  и  $\Psi$ , следуя работе [6], представим рядами

$$F = \sum_{j=0}^{\infty} (F_{2j} + F_{2j+1}), \quad H = \sum_{j=0}^{\infty} (H_{2j} + H_{2j+1}), \quad \Psi = \sum_{j=0}^{\infty} (\Psi_{2j} + \Psi_{2j+1}). \quad (14)$$

Члены этих рядов с четными индексами будем искать в виде

$$F_{2j} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2j)} h_n(m_1 \rho) P_n(\cos \theta), \quad H_{2j} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(2j)} h_n(m_2 \rho) P_n(\cos \theta), \quad (15)$$

$$\Psi_{2j} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(2j)} h_n(m_3 \rho) P_n(\cos \theta),$$

а с нечетными — в виде

$$F_{2j+1} = \int_0^{\infty} A_j(\xi) e^{-\mu_1 z} J_0(\xi r) \frac{\xi}{\mu_1} d\xi, \quad H_{2j+1} = \int_0^{\infty} B_j(\xi) e^{-\mu_2 z} J_0(\xi r) \frac{\xi}{\mu_2} d\xi, \quad (16)$$

$$\Psi_{2j+1} = \int_0^{\infty} C_j(\xi) e^{-\mu_3 z} J_0(\xi r) \frac{\xi}{\mu_3} d\xi, \quad \mu_p^2 = \xi^2 - m_p^2, \quad p = 1, 2, 3.$$

Здесь  $h_n(x)$  — сферическая функция Ханкеля второго рода;  $P_n(x)$  — полиномы Лежандра порядка  $n$ ;  $J_0(x)$  — цилиндрическая функция Бесселя первого рода.

Непосредственной подстановкой функций (15), (16) в уравнения (12) легко убедиться, что они являются решениями этих уравнений, исчезающими на бесконечности. Величины  $A_j, B_j, C_j, a_n^{(2j)}, b_n^{(2j)}$  и  $c_n^{(2j)}$ , входящие в (15), (16), определяются из следующих условий:

- а) температура, напряжения и усилия в оболочке, соответствующие функциям  $F_0, H_0$  и  $\Psi_0$ , удовлетворяют граничным условиям (4), (5);
- б) температура и напряжения, соответствующие  $F_{2j} + F_{2j+1}; H_{2j} + H_{2j+1}$  и  $\Psi_{2j} + \Psi_{2j+1}$  удовлетворяют условиям (1), (2) при  $j = 0, 1, 2, \dots$ ;
- в) температура, напряжения и усилия в оболочке, соответствующие  $F_{2j+1} + F_{2j+2}; H_{2j+1} + H_{2j+2}$  и  $\Psi_{2j+1} + \Psi_{2j+2}$ , удовлетворяют условиям (4), (5) при  $q_1 = 0$  и  $j = 0, 1, 2, \dots$

**Определение функций  $F_0, H_0$  и  $\Psi_0$ .** Для определения постоянных  $a_n^{(0)}, b_n^{(0)}$  и  $c_n^{(0)}$ , которые содержат функции  $F_0, H_0$  и  $\Psi_0$ , используем граничные условия (4), (5). Если в эти условия подставить соотношения (6), (7), (10) и (13), выраженные через функции (15) при  $j = 0$ , то после некоторых преобразований получим систему уравнений

$$\sum_{n=0}^{\infty} [A_n^{(1)}(h) a_n^{(0)} + A_n^{(2)}(h) b_n^{(0)} + B_n(h) d_n^{(0)}] P_n(\cos \theta) = - \frac{k_* R_1^3 D_0 (1 + \nu_0) \alpha_0^{(t)}}{3\lambda_0 G} q_1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [L_n^{(1)}(h) a_n^{(0)} + L_n^{(2)}(h) b_n^{(0)} + M_n(h) d_n^{(0)}] \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta} = 0, \quad d_0^{(0)} = 0, \quad (17)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} N_n(h) a_n^{(0)} P_n(\cos \theta) = - \frac{\alpha^{(t)} (1 + \nu) (1 - 2k_*) R_1^2}{3\lambda (1 - \nu) (m_2^2 - m_1^2)} q_1.$$

Здесь обозначено:

$$d_n^{(2j)} = - m_3 \left( \frac{c_{n+1}^{(2j)}}{2n+3} - \frac{c_{n-1}^{(2j)}}{2n-1} \right), \quad n \geq 1; \quad d_0^{(2j)} = 0; \quad (18)$$

$$A_n^{(i)}(h) = [n(n+1)(\chi + \nu_n) - m_3^2 R_1^2] h_n(m_i R_1) - [2\chi - k_* g^{(0)} m_3^2 R_1^2 + n(n+1)\nu_n] s_n^{(i)}(h) + [1 - (-1)^i] k_* \alpha_*^{(t)} (1 - \nu) (1 - \nu_0)^{-1} (m_2^2 - m_1^2) R_1^2 \times$$

$$\times \left\{ 2 + \frac{1}{3\lambda^{(0)}} k_* c^{(1)} m_i^2 R_1^2 \left[ 1 + \frac{1}{12} n(n+1) k_* \right] \right\} h_n(m_i R_1); \quad i = 1, 2;$$

$$B_n(h) = n(n+1) \{ (\chi + \nu_n) s_n^{(3)}(h) - [ \chi + (n^2 + n - 1) \nu_n - k_* g^{(0)} m_3^2 R_1^2 ] h_n(m_3 R_1) \}; \quad (19)$$

$$L_n^{(i)}(h) = (\chi + \nu_n) s_n^{(i)}(h) - [2(1 - k_* g^{(0)} m_3^2 R_1^2) + (1 + 12k_*^2) \nu_n] h_n(m_i R_1) - [1 - (-1)^i] k_* \alpha_*^{(t)} E^{(0)} (1 - \nu) (1 - \nu_0)^{-1} (m_2^2 - m_1^2) R_1^2 \left[ 1 - \frac{1}{6\lambda^{(0)}} k_* c^{(1)} m_i^2 R_1^2 \times \right.$$

$$\left. \times \left( 1 - \frac{1}{6} k_* \right) \right] h_n(m_i R_1); \quad EE^{(0)} = E_0; \quad gg^{(0)} = g_0; \quad \alpha^{(t)} \alpha_*^{(t)} = \alpha_0^{(t)};$$

$$M_n(h) = [n(n+1)(\chi + \nu_n) - 2(1 - k_* g^{(0)} m_3^2 R_1^2) - (1 + 12k_*^2) \nu_n] h_n(m_3 R_1) -$$

$$-2(1 - k_* g^{(0)} m_3^2 R_1^2) + (1 + 12k_*^{-2}) v_n] s_n^{(3)}(h); \quad N_n(h) = s_n^{(1)}(h) \dots$$

$$- \left\{ n(n+1) k_* (1 - k_*) \lambda^{(0)} - \frac{1}{3} [3k_* (1 - k_*) c^{(0)} + (1 - 2k_*) c^{(1)}] m_1^2 R_1^2 \right\} \times$$

$$\times h_n(m_1 R_1);$$

$$s_n^{(i)}(h) = m_i R_1 h_{n-1}(m_i R_1) - (n+1) h_n(m_i R_1);$$

$$\kappa = 2[1 + k_* E^{(0)}(1 + \nu)(1 - \nu_0)^{-1}];$$

$$v_n = 1/12 k_*^3 \{ g^{(0)} m_3^2 R_1^2 + 2E^{(0)}(1 + \nu)(1 - \nu_0)^{-1} [n(n+1)(1 - \nu_0)^{-1} - 1] \}.$$

Если коэффициенты  $a_n^{(0)}$  найдены, то  $c_n^{(0)}$  определяются формулой [6]

$$c_n^{(2j)} = -(2n+1) m_3^{-1} (a_{n+1}^{(2j)} - a_{n+3}^{(2j)} + \dots). \quad (20)$$

После разложения правых частей системы (17) в ряды по полиномам Лежандра получим соотношения для определения коэффициентов  $a_0^{(0)}, b_0^{(0)}$ . При этом коэффициенты  $a_n^{(0)} = b_n^{(0)} = a_n^{(0)} = 0$  для  $n \geq 1$ , следовательно, из (20) имеем  $c_n^{(0)} = 0$  для любого  $n$ . Таким образом, функции (15) имеют вид

$$F_0 = a_0^{(0)} h_0(m_1 \rho), \quad H_0 = b_0^{(0)} h_0(m_2 \rho), \quad \Psi_0 = 0. \quad (21)$$

**Построение  $(2n+1)$ -го приближения.** Определим функции  $F_{2j+1}, H_{2j+1}$  и  $\Psi_{2j+1}$  по известному  $(2j)$ -му приближению. Воспользуемся соотношениями (1), (2), которые с учетом условия б) разбиваем на слагаемые с четными и нечетными индексами. В полученные таким путем соотношения вместо температуры и напряжений подставим их выражения (6) и (13), записанные через функции (15), (16). При этом функции (15) представляют в цилиндрических координатах по формулам, приведенным в работе [6]. В результате получим

$$(2\xi^2 - m_3^2) [\mu_1^{-1} A_j(\xi) + \mu_2^{-1} B_j(\xi)] + 2\xi^2 C_j(\xi) =$$

$$= - (2\xi^2 - m_3^2) [\mu_1^{-1} e^{-\mu_1 d} F(2j) + \mu_2^{-1} e^{-\mu_2 d} H(2j)] + 2\xi^2 e^{-\mu_3 d} \Psi(2j),$$

$$2\mu_3 [A_j(\xi) + B_j(\xi)] + (2\xi^2 - m_3^2) C_j(\xi) = 2\mu_3 [e^{-\mu_1 d} F(2j) + e^{-\mu_2 d} H(2j)] -$$

$$- (2\xi^2 - m_3^2) e^{-\mu_3 d} \Psi(2j), \quad (22)$$

$$A_j(\xi) = (\lambda\mu_1 - \varepsilon_c) (\lambda\mu_1 + \varepsilon_c)^{-1} e^{-\mu_1 d} F(2j), \quad F(2j) = \frac{i}{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} i^n a_n^{(2j)} P_n \left( \frac{i\mu_1}{m_1} \right),$$

$$H(2j) = \frac{i}{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} i^n b_n^{(2j)} P_n \left( \frac{i\mu_2}{m_2} \right), \quad \Psi(2j) = \frac{i}{m_3} \sum_{n=0}^{\infty} i^n c_n^{(2j)} P_n \left( \frac{i\mu_3}{m_3} \right).$$

Таким образом, если  $(2j)$ -е приближение известно (следовательно, известны функции  $F(2j), H(2j), \Psi(2j)$ ), то из системы (22) определяются величины  $A_j(\xi), B_j(\xi)$  и  $C_j(\xi)$ , что согласно (16) решает вопрос о нахождении функций  $F_{2j+1}, H_{2j+1}$  и  $\Psi_{2j+1}$ .

**Построение  $(2j+2)$ -го приближения.** Найдем функции  $F_{2j+2}, H_{2j+2}$  и  $\Psi_{2j+2}$  по известному  $(2j+1)$ -му приближению. Величины  $a_n^{(2j+2)}, b_n^{(2j+2)}$  и  $c_n^{(2j+2)}$ , входящие в функции (15), определим из условий (4), (5) при  $q_1 = 0$ . В этих условиях температуру, напряжения, перемещения, а также усилия в оболочке разбиваем в соответствии с условием в) на слагаемые с четными и нечетными индексами. Если подставить вместо указанных величин их значения (6), (7), (10), (13), выраженные через функции (15), (16), представленные в сферических координатах, то получим

$$A_n^{(1)}(h) a_n^{(2j+2)} + A_n^{(2)}(h) b_n^{(2j+2)} + B_n(h) d_n^{(2j+2)} =$$

$$= - [A_n^{(1)}(j) a_n^{(2j+1)} + A_n^{(2)}(j) b_n^{(2j+1)} + B_n(j) d_n^{(2j+1)}],$$

$$L_n^{(1)}(h) a_n^{(2j+2)} + L_n^{(2)}(h) b_n^{(2j+2)} + M_n(h) d_n^{(2j+2)} =$$

$$= - [L_n^{(1)}(j) a_n^{(2j+1)} + L_n^{(2)}(j) b_n^{(2j+1)} + M_n(j) d_n^{(2j+1)}], \quad (23)$$

$$a_n^{(2j+2)} = -N_n(j) N_n^{-1}(h) a_n^{(2j+1)}, \quad a_n^{(2j+1)} = \int_0^\infty A_l(\xi) q_n^{(1)} \xi d\xi, \quad d_0^{(2j+2)} = 0,$$

$$b_n^{(2j+1)} = \int_0^\infty B_j(\xi) q_n^{(2)} \xi d\xi, \quad c_n^{(2j+1)} = \int_0^\infty C_l(\xi) q_n^{(3)} \xi d\xi, \quad d_0^{(2j+1)} = 0,$$

$$q_n^{(p)} = (2n+1) i^n \mu_p^{-1} \exp(-\mu_p d) P_n(i\mu_p/m_p), \quad p = 1, 2, 3.$$

Здесь величины  $A_n^{(i)}(j)$ ,  $B_n(j)$ ,  $L_n^{(i)}(j)$ ,  $M_n(j)$  и  $N_n(j)$  определяются формулами (19), если в них функции  $h_n(x)$  заменить сферическими функциями Бесселя  $j_n(x)$ .

Уравнения (23) служат для определения коэффициентов  $a_n^{(2j+2)}$ ,  $b_n^{(2j+2)}$  и  $d_n^{(2j+2)}$  по коэффициентам предыдущего приближения; если они найдены, то из (20) следует, что известно и значение  $c_n^{(2j+2)}$ . Этим согласно (15) функции  $F_{2j+2}$ ,  $H_{2j+2}$  и  $\Psi_{2j+2}$  полностью определяются.

Таким образом, соотношения (21) — (23) дают возможность определить любое приближение для функций  $F$ ,  $H$  и  $\Psi$ , построенных в виде рядов (14). С использованием этих функций, а также соотношений (6), (7), (10) и (13) можно получить формулы для определения температуры, перемещений, напряжений в полупространстве и усилий в оболочке (ввиду громоздкости указанных формул приводить их не будем).

Отметим, что нулевое приближение (21) рядов (14) соответствует решению задачи теплопроводности и динамической задачи термоупругости для пространства с рассматриваемым сферическим включением.

1. Новацкий В. Вопросы термоупругости. — М.: Изд-во АН СССР, 1962. — 364 с.
2. Подстригач Я. С., Воробец Б. С., Чернуха Ю. А. О термоупругом равновесии неоднородных тел. — Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1976, вып. 16, с. 23—28.
3. Подстригач Я. С., Шевчук П. Р. О напряженно-деформированном состоянии нагреваемых упругих тел, содержащих включения в виде тонких оболочек. — Прикл. механика, 1967, 3, вып. 6, с. 8—16.
4. Fox N. Torsion-free stress systems in a thick plate containing a spherical cavity. — Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1960, 13, N 2, p. 228—246.
5. Kulshrestha P. K., Puri P. Coupled thermoelastic problem for an elastic half-space with an embedded spherical cavity. — Arch. Mech., 1971, 23, N 2, p. 249—263.
6. Thiruvenkatachar V. R., Viswanathan K. Dynamic response of an elastic half-space to time-dependent surface tractions over an embedded spherical cavity. — Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1965, 287, N 1411, p. 549—567.

Институт прикладных проблем  
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию  
28.05.80

УДК 539.3

В. С. Колесов, Л. Г. Смирнов

#### ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПОЛУПЛОСКОСТИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Рассмотрим упругое изотропное тело с включением из материала, обладающего теми же упругими свойствами, но другим коэффициентом линейного расширения. Пусть тело от начальной нулевой температуры нагревается до постоянной температуры  $T_0$ . Возникающее при этом напряженное состояние аналогично тому, которое имеет место в однородном теле, если область включения нагревается до  $T_0$ , а остальное тело сохраняет температуру, равную нулю. Задачи такого рода впервые были исследованы Дж. Гудьером [4],