Продифференцируем (7) и (8) по переменной t и примем во внимание (9) и (10), умноженное на р. Тогда получим, что $\partial_x \partial_t \tau = 0$ и $\mathrm{p}\partial_x (\mathrm{p} \cdot \partial_t \xi) = 0$. Если подставить эти результаты соответственно в (11) и (10), то получим, что $(\mathrm{p}\partial_x)^2 \xi = 0$ и $\partial_{tt}\tau = 0$. Учитывая условие (12), видим, что все вторые производные от τ и ξ равны нулю. Из тождеств (8) и (7) следует, что

$$2\delta_\alpha^\beta \partial_t \tau = \xi_\alpha^{;\beta} + \xi^\beta_{,\alpha}, \tag{13}$$

$$\tau_{,\alpha} + \partial_t \xi_\alpha = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n-1), \tag{14}$$

откуда сразу видно, что искомый генератор X симметрии системы $dk_l = 0$ ($l = 1, \ldots, n-1$) разлагается по генераторам псевдоевклидовой группы пространства Е и по генератору однородных растяжений $X_d = \mathrm{x} \cdot \partial_x$.

Выполнение соотношения (iii) для генератора X_d следует из того, что $Z_d k_l = k_l$ ($l = 1, \ldots, n-1$). При этом используется формула

$$Z_d [(\mathrm{p}^{(1)} \wedge \cdots \wedge \mathrm{p}^{(l)})^2 + (\mathrm{p}^{(2)} \wedge \cdots \wedge \mathrm{p}^{(l)})^2] =$$

$$= 2 \sum_{m=1}^{l-1} m [(\mathrm{p}^{(1)} \wedge \cdots \wedge \mathrm{p}^{(l)})^2 + (\mathrm{p}^{(2)} \wedge \cdots \wedge \mathrm{p}^{(l)})^2]. \tag{15}$$

То, что соотношения (i) инвариантны относительно растяжений, также следует из (15).

Если $\dim$ Е $= 2$, то правая часть уравнения (5) равна нулю тождественно. В этом случае необходимо использовать непосредственно уравнение (4). Инфинитезимальные симметрии окажутся тогда генераторами конформной группы пространства Е.

Рассуждения остаются в силе, если в системе $dk_1 = \ldots = dk_{n-1} = 0$ отбросить все уравнения, кроме первого. Таким образом, инфинитезимальные симметрии линий постоянной первой кривизны также натянуты на генераторы однородных растяжений (и псевдоевклидовых движений).

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1978.— 400 с.
2. *Шилов Г. Е.* Математический анализ : Функции одного переменного.— М. : Наука, 1970.— Ч. 3. 352 с.
3. *Hermann R.* Geometry, physics, and systems.— New York : Dekker, 1973.— 306 p.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
25.06.80

УДК 517.968.23

А. И. Песчанский, В. В. Шевчик

О ПЛОЩАДНОЙ ЗАДАЧЕ СО СДВИГОМ

Площадной задачей со сдвигом в работе [5] названа задача с аналитическим сдвигом для полуплоскости:

$$G^+(z)\,\Phi^+(z + \beta i) - \lambda\Phi^+(z) = H^+(z) \quad (\beta > 0), \tag{1}$$

где $G^+(z)$, $H^+(z)$ — заданные функции, аналитические в верхней полуплоскости; $\Phi^+(z)$ — искомая функция, удовлетворяющая соотношению (1).

Задача (1) — частный случай сложной, более общей задачи

$$G^+(z)\,\Phi^+(a^+(z)) - \lambda\Phi^+(z) = H^+(z) \tag{2}$$

с произвольным сдвигом $a^+(z)$ верхней полуплоскости на себя. Нам неизвестны какие-либо попытки провести исследование задачи (2) при общих предположениях относительно функции $a^+(z)$. Что касается задачи (1), то при значительных ограничениях она рассматривалась в работах [3, 6], а в работе [7] ее решения были использованы при исследовании задач математической физики.

В настоящей статье изучен характер разрешимости задачи (1) в некотором классе функциональных пространств. В ряде частных случаев найдены решения этой задачи и показано, как они могут быть использованы при решении обыкновенных дифференциальных уравнений и некоторых интегральных уравнений.

Пусть $G^+(z)$ — функция, аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Im} z > \nu_1$ и такая, что 1) для некоторого фиксированного комплексного числа a

$$\lim_{|z|\to\infty} G^+(z) = a, \quad \operatorname{Im} z \geqslant \nu_1;$$

2) функция $G_1^+(z) = G^+(z) - a$ принадлежит пространству $R_+^{\nu_1}$. (Класс функций $R_+^{\nu_1}$ вводится аналогично классу Винера R_+ [4] и состоит из функций $G^+(z)$, аналитических в полуплоскости $\operatorname{Im} z > \nu_1$ и таких, что

$$G_1^+(z + \nu_1 i) \in R_+.)$$

Обозначим через $H_{2,\alpha}^{\nu}(-\infty, \infty)$ ($\nu > \nu_1$ $-\infty < \alpha < \infty$) двухпараметрическое семейство пространств Харди, каждое из пространств которого состоит из функций $F(z)$, заданных на прямой $\operatorname{Im} z = \nu$, допускающих аналитическое продолжение на полуплоскость $\operatorname{Im} z > \nu$ и таких, что при этом

$$\sup_{y\geqslant\nu}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |(x + yi + i)^{\alpha} F(x + yi)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Рассмотрим оператор

$$(AF)(x) \equiv G^+(x) F(x + \beta i), \tag{3}$$

ограниченно действующий в каждом $H_{2,\alpha}^{\nu}(-\infty, \infty)$.

Вопрос о разрешимости задачи (1) в классе функций $H_{2,\alpha}^{\nu}(-\infty, \infty)$ такой же, как и вопрос о спектре оператора A в пространстве $H_{2,\alpha}^{\nu}(-\infty, \infty)$.

Теорема 1. Спектр оператора A в пространстве $H_{2,\alpha}^{\nu}(-\infty, \infty)$ состоит из тех и только тех точек комплексной плоскости, которые принадлежат множеству

$$\sigma = \{z = r\exp(i\arg a), \quad 0 \leqslant r \leqslant |a|\}.$$

Наметим схему доказательства. Оператор A представим в виде суммы двух операторов B, T, где

$$(B\Phi)(z) \equiv (G^{(+)}(z) - a)\,\Phi^+(z + \beta i);$$

$$(T\Phi)(z) \equiv a\Phi^+(z + \beta i).$$

Покажем вполне непрерывность оператора T в пространстве $H_{2,\alpha}^{\nu}(-\infty, \infty)$. Поскольку оператор $J : H_{2,\alpha}^{\nu} \to H_2$

$$(J\Phi^+)(z) \equiv (z + \nu i + i)^{\alpha}\,\Phi^+(z + \nu i), \ \operatorname{Im} z \geqslant 0$$

устанавливает изометрию пространств $H_{2,\alpha}^{\nu}$ и H_2, то достаточно показать вполне непрерывность оператора JTJ^{-1} в пространстве $H_2(-\infty, \infty)$. С помощью преобразования Фурье V для JTJ^{-1} получим представление

$$(JTJ^{-1}\Psi)(z) \equiv (G^+(z) - a)\,\Psi^+(z + \beta i) =$$

$$= \left(V\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t g_1(t - s)\,e^{-\beta s}(V^{-1}\Psi^+)(s)\,\mathrm{ds}\right]\right)(z), \tag{4}$$

где $g_1(t) \in L_1(-\infty, \infty)$; $(Vg_1)(z) = G^+(z) - a$.

Из результатов работы [2] и свойства 1) функции $G^{+}(z)$ следует, что оператор в правой части (4) вполне непрерывен. Таким образом, T вполне непрерывен в $H^{\nu}_{2,\alpha}(-\infty, \infty)$.

Учитывая, как и выше, изоморфизм пространств $H^{\nu}_{2,\alpha}(-\infty, \infty)$ и $H_2(-\infty, \infty)$, с помощью преобразования Фурье устанавливаем, что спектром оператора B в пространстве $H^{\nu}_{2,\alpha}(-\infty, \infty)$ является множество σ. Спектр оператора $B+T$ может отличаться от спектра оператора B не более чем на счетное число изолированных точек, имеющих предельной точкой нуль [1]. Такие точки могут быть только собственными значениями оператора $B+T$. Предположение об их существовании, как легко показать, противоречит свойству изолированности. Последнее означает, что спектр оператора $B+T$ совпадает с σ.

Замечание 1. В силу представления оператора A в виде $A = B + T$ точки λ множества σ не являются точками нормальной разрешимости оператора $A - \lambda I$.

Замечание 2. При $|\lambda| > a$ обратный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ задается сходящимся по норме пространства $H^{\nu}_{2,\alpha}$ рядом Неймана

$$\left((A-\lambda I)^{-1} H^{+}\right)(z) = -\lambda^{-1} H^{+}(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k-1} H^{+}(z+\beta k i) \prod_{m=0}^{k-1} G^{+}(z+\beta m i)\Bigg).$$

Как показывают примеры, размерность ядра оператора $A - \lambda I$ при $\lambda \in \sigma$ зависит от выбора функции G. Характер этой зависимости в общем случае установить не удалось. Рассмотрим далее один частный случай.

Обозначим через $\hat{R}^{\nu_1}_{+}$ подмножество функций $G_1(z)$ из $R^{\nu_1}_{+}$ таких, что

$$G_1^{+}(z + \nu_1 i) = (V g_1)(z),$$

где $g_1(t)$ — кусочно-непрерывная суммируемая функция, удовлетворяющая условию Дини при $t \geqslant 0$, т. е. для любого $\delta > 0$

$$\int_{-\delta}^{0} \frac{g_1(t+s) - g_1(t-0)}{s}\, ds < \infty, \quad \int_{0}^{\delta} \frac{g_1(t+s) - g_1(t+0)}{s}\, ds < \infty. \tag{5}$$

Последнее означает, что для любой функции из $R^{\nu_1}_{+}$ определено обратное преобразование Фурье V^{-1}.

Теорема 2. Если $G^{+}(z) \neq 0$ $(\operatorname{Im} z \geqslant \nu_1)$ и $\ln \frac{G^{+}(z)}{a} \in \hat{R}^{\nu_1}_{+}$, то при $\lambda \in \sigma \setminus \{0\}$ размерность ядра оператора $A - \lambda I$ в пространстве $H^{\nu}_{2,\alpha}$ равна нулю в случае

$$\operatorname{Re}\gamma \equiv \operatorname{Re}\lim_{t\to+0}\left(V^{-1}\left[\ln\frac{G^{+}(z)}{a}\right]\right)(t) \leqslant \frac{1}{2}\beta + \alpha\beta \tag{6}$$

и равна единице в случае

$$\operatorname{Re}\gamma > \frac{1}{2}\beta + \alpha\beta. \tag{7}$$

При $\lambda = 0$ размерность ядра оператора A всегда равна нулю.

Остановимся на идее доказательства. Рассмотрим однородное уравнение

$$G^{+}(z)\Phi^{+}(z+\beta i) - \lambda\Phi^{+}(z) = 0 \tag{8}$$

в пространстве $H^{\nu}_{2,\alpha}(-\infty, \infty)$. Используя преобразование Фурье и привлекая обобщенные функции, удается получить факторизацию коэффициента

$$G^{+}(z) = \frac{a\,(z + (c-\nu)\,i)^{-\gamma\beta^{-1}} \exp \Psi^{+}(z)}{(z + (c+\beta-\nu)\,i)^{-\gamma\beta^{-1}} \exp \Psi^{+}(z+\beta i)}, \tag{9}$$

где c — любое положительное число и

$$\Psi^{+}(z)=\left(V\left[\frac{\left(V^{-1}\left[\ln\frac{G^{+}(z)}{a}\right]\right)(t)}{1-\exp(-\beta t)}-\frac{\gamma\exp((\nu-c)t)}{\beta t}\right]\right)(z)\in R_{+}^{\nu}.$$

С учетом этой факторизации уравнение (7) приводится к следующей однородной задаче по скачку:

$$(z+(c+\beta-\nu)i)^{\gamma\beta^{-1}}\frac{\Phi^{+}(z+\beta i)}{\exp\Psi^{+}(z+\beta i)}-\frac{\lambda}{a}(z+(c-\nu)i)^{\gamma\beta^{-1}}\frac{\Phi^{+}(z)}{\exp\Psi^{+}(z)}=0. \tag{10}$$

Здесь функция $(z+(c-\nu)i)^{\gamma\beta^{-1}}\dfrac{\Phi^{+}(z)}{\exp\Psi^{+}(z)}\in H_{2,\alpha-(\mathrm{Re}\gamma)\beta^{-1}}^{\nu}$.

Используя опять преобразование Фурье, устанавливаем, что задача (9) в пространстве $H_{2,\alpha-(\mathrm{Re}\gamma)\beta^{-1}}^{\nu}$ имеет только нулевое решение в случае $\mathrm{Re}\,\gamma\leqslant\frac{1}{2}\beta+\alpha\beta$ и единственное ненулевое решение $Q\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{-iz\beta^{-1}}$ ($Q=$ $=\mathrm{const}$) в случае $\mathrm{Re}\,\gamma>\frac{1}{2}\beta+\alpha\beta$. Соответственно уравнение (7) в пространстве $H_{2,\alpha}^{\nu}$ имеет либо только нулевое решение, либо единственное ненулевое

$$\Phi^{+}(z)=Q\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{-iz\beta^{-1}}\frac{\exp\Psi^{+}(z)}{(z+(c-\nu)i)^{\gamma\beta^{-1}}}.$$

Следствие. Если функция $G^{+}(z)$ удовлетворяет условию $\ln\frac{G^{+}(z)}{a}\in$ $L_{1+}(-\infty,\infty)\cap R_{+}^{\nu}$, то ядро оператора $A-\lambda I$ при $\lambda\in\sigma$ нулевое в $H_{2,\alpha}^{\nu}(-\infty,\infty)$, $\alpha>-\frac{1}{2}$.

Теорема 3. Пусть функция $G^{+}(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 и $\lambda\bar{\in}\sigma$. Тогда неоднородное уравнение

$$G^{+}(z)\Phi^{+}(z+\beta i)-\lambda\Phi^{+}(z)=H^{+}(z) \tag{11}$$

при любой $H^{+}(z)\in H_{2,\alpha}^{\nu}(-\infty,\infty)$ имеет единственное решение

$$\Phi^{+}(z)=-\lambda^{-1}H^{+}(z)+\frac{\exp\Psi^{+}(z)}{(z+(c-\nu)i)^{\gamma\beta^{-1}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\left(V\left[\frac{\exp(-\beta t)}{\lambda(\exp(-\beta t)-\lambda/a)}\right]\right)(z-s)\frac{H^{+}(s)(s+(c-\nu)i)^{\gamma\beta^{-1}}}{\exp\Psi^{+}(s)}ds.$$

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$(a+\lambda\exp(\beta t))\Psi(t)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}g(t-s)\Psi(s)\,\mathrm{ds}=h(t),\quad t\geqslant 0, \tag{12}$$

где a, λ — постоянные; $\exp(-\nu_1 t)\,g(t)\in L_{1+}(-\infty,\infty)$ и удовлетворяет (5);

$$\exp(-\nu t)\,h(t)\in L_{2+}(-\infty,\infty);\quad \exp(-\nu t)\,\Psi(t)\in L_{2+}(-\infty,\infty).$$

С помощью преобразования Фурье уравнение (12) сводится к площадной задаче (11) в пространстве $H_{2,0}^{\nu}(-\infty,\infty)$. Уравнение (12) при более жестких ограничениях на $g(t)$ рассматривалось ранее в работе [7].

Пример 2. Уравнение

$$\frac{G(x)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta}{(x-\tau)^2+\beta^2}\Phi(\tau)\,\mathrm{d}\tau-\lambda\Phi(x)=H(x),\quad -\infty<x<\infty, \tag{13}$$

где $G(x) - a \in R_+^{-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$; $\Phi(x)$, $H(x) \in H_2(-\infty, \infty)$, с помощью формулы Пуассона сводится к задаче (11).

Пример 3. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(a_n e^{-\beta t} - \lambda b_n)\varphi^{(n)}(t) + (a_{n-1}e^{-\beta t} - \lambda b_{n-1})\varphi^{(n-1)}(t) + \cdots$$
$$\cdots + (a_0 e^{-\beta t} - \lambda b_0)\varphi(t) = 0,$$
$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \cdots = \varphi^{(n-1)}(0) = 0, \quad a_n \neq 0, \quad b_n \neq 0, \quad t \geqslant 0. \tag{14}$$

Решение ищем в $L_2(0, \infty)$.

С помощью преобразования Фурье уравнение (14) приводится к следующей площадной задаче в классе $H_2(-\infty, \infty)$:

$$\frac{a_n(z+\beta i)^n + (-i)\,a_{n-1}(z+\beta i)^{n-1} + \cdots + (-i)^n a_0}{b_n(z+\beta i)^n + (-i)\,b_{n-1}(z+\beta i)^{n-1} + \cdots + (-i)^n b_0}\,\Psi(z+\beta i) - \lambda\Psi(z) = 0,$$
$$\operatorname{Im} z \geqslant 0. \tag{15}$$

В частном случае, когда $(-i)^k a_k = C_n^{n-k}(ip)^k$, $(-i)^k b_k = C_n^{n-k}(iq)^k$, задача (15) имеет вид

$$\left(\frac{z+(q+\beta)i}{z+(p+\beta)i}\right)^n \Psi^+(z+\beta i) - \lambda\Psi^+(z) = 0. \tag{16}$$

Пусть $p > -\beta$ и $q > -\beta$, $q = p + \beta m$, m — натуральное. В случае $\lambda \in (0, 1]$ уравнение (16) имеет единственное ненулевое решение

$$\Psi^+(z) = \frac{Q\lambda^{-iz\beta^{-1}}}{[(z+(p+\beta)i)(z+(p+2\beta)i)\ldots(z+(p+m\beta)i]^n}, \quad Q = \mathrm{const}.$$

1. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов.— УМН, 1957, 12, вып. 2, с. 44—118.
2. *Карапетянц Н. К.* Об одном классе вполне непрерывных операторов свертки и его приложения.— В кн.: Школа по теории операторов в функциональных пространствах : Тез. докл. Минск, 1978, с. 59—60.
3. *Карапетянц Н. К., Самко С. Г.* Об одной краевой задаче теории аналитических функций со смещением.— Изв. вузов. Математика, 1972, 11, с. 18—22.
4. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов.— УМН, 1958, 13, вып. 5, с. 3—120.
5. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.— М. : Наука, 1977.— 448 с.
6. *Фан Танг Да.* Краевые задачи теории функций, решаемые методом факторизации, и интегральные уравнения типа свертки : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Одесса, 1972.— 14 с.
7. *Черский Ю. И.* Граничные задачи и интегральные уравнения, решаемые методом факторизации.— В кн.: Тр. симп. по механике сплошной среды и родств. пробл. анализа. Тбилиси : Мецниереба, 1974, т. 2, с. 281—291.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
04.01.80

УДК 512.8

В. Р. Зелиско, Б. З. Шаваровский

РАЗЛОЖЕНИЕ МАТРИЧНОГО МНОГОЧЛЕНА В ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖИТЕЛЕЙ ПРОСТОЙ СТРУКТУРЫ

Пусть $A(x)$ — неособенная полиномиальная $n \times n$-матрица с элементами из $\mathbf{C}[x]$, которую запишем в виде матричного многочлена

$$A(x) = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \cdots + A_s. \tag{1}$$