то в силу теоремы 3 существуют гильбертово пространство $\hat{\mathfrak{H}}$, $U \in B(D(M), \hat{\mathfrak{H}})$, $\Psi \in B(H, \hat{\mathfrak{H}})$ такие, что

$$R(U) = R(U - \Psi) = \hat{\mathfrak{H}},\ Z(U) \supset D(M_0),\ D(T^*) = Z(U - \Psi).$$

Отсюда и из леммы о тройке следует, что $\tilde{W}_1 - \Phi_2 = C(U - \Psi)$, где $C \in B(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_1)$; $Z(C) = \{0\}$. Теперь уже ясно, что (14) имеет место.

Замечание 2. Условия $R(W_1 - \Phi_1) = \mathfrak{H}_1$, $R(\tilde{W}_1 - \Phi_2) = \mathfrak{H}_2$ выполняются, например, тогда, когда операторы Φ_i, $i = 1, 2$ являются компактными [2] или достаточно малыми по норме.

1. *Горбачук М. Л.* Самосопряженные граничные задачи для дифференциального уравнения второго порядка с неограниченным операторным коэффициентом.— Функцион. анализ, 1971, 5, № 1, 10—21.
2. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.— М. : Мир, 1972.— 740 с.
3. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М. : Наука, 1976.— 542 с.
4. *Кочубей А. Н.* О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений.— Мат. заметки, 1975, 17, вып. 1, с. 41—48.
5. *Лянце В. Э.* О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве.— Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1972, вып. 16, с. 165—186.
6. *Рофе-Бекетов Ф. С.* Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций.— Докл. АН СССР, 1969, 184, № 5, с. 1034—1037.

Львовский университет
Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
19.11.79

УДК 517.524

Д. И. Боднар

ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ С ЧАСТНЫМИ ЗВЕНЬЯМИ ВИДА $\frac{(1 - g_{i_1 i_2 \ldots i_k})\, \hat{g}_{i_1 i_2 \ldots i_k} x_{i_1 i_2 \ldots i_k}}{1}$

Для установления равномерной сходимости функциональных рядов существенное значение имеют мажорантные ряды. Аналогичная задача о построении мажорант, но в виде ветвящихся цепных дробей, возникает и при исследовании сходимости ветвящихся цепных дробей. В этой связи дадим некоторые определения.

Определение 1. Ветвящаяся цепная дробь

$$d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N_1} \frac{c_{i_1 i_2 \ldots i_k} |}{| d_{i_1 i_2 \ldots i_k}} \tag{1}$$

с комплексными элементами называется максимантой (минимантой) ветвящейся цепной дроби

$$b_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x) |}{| b_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x)} \tag{2}$$

с комплекснозначными элементами-функциями, заданными в некоторой области D, если для произвольного индекса n справедливо соотношение

$$\left|\frac{P_n}{Q_n}\right| \leqslant \left|\frac{C_n}{D_n}\right| \left(\left|\frac{P_n}{Q_n}\right| \geqslant \left|\frac{C_n}{D_n}\right|\right),$$

где P_n/Q_n, C_n/D_n — n-е подходящие дроби ветвящихся цепных дробей (2) и (1) соответственно.

Определение 2. Ветвящаяся цепная дробь (1) называется мажорантой (минорантой) ветвящейся цепной дроби (2), если при тех же предположениях существует такой номер s и положительная константа M, что для произвольных натуральных n и m ($n \geqslant s$, $m \geqslant s$) справедливо соотношение

$$\left|\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_m}{Q_m}\right| \leqslant M \left|\frac{C_n}{D_n}-\frac{C_m}{D_m}\right| \left(\left|\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_m}{Q_m}\right| \geqslant M \left|\frac{C_n}{D_n}-\frac{C_m}{D_m}\right|\right).$$

Предложение. Если мажоранта (1) ветвящейся цепной дроби (2) сходится, то дробь (2) равномерно сходится в области D.

При построении мажорант возникает необходимость производить некоторые оценки частей дроби (2), эквивалентные построению максимант, хотя из сходимости последних еще не следует сходимость дроби (2).

Теорема 1. Пусть $x_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ ($i_k = \overline{1, N}$; $k = 1, 2, \ldots$) — комплексные переменные $g_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, $\hat{g}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ ($i_k = \overline{1, N}$; $k = 1, 2, \ldots$), $\hat{g}_0$ — действительные константы, такие, что

$$0 \leqslant g_{i_1 i_2 \ldots i_k} < 1, \quad 0 \leqslant \hat{g}_{i_1 i_2 \ldots i_k} < 1, \quad 0 \leqslant \hat{g}_0 < 1 \tag{3}$$

или

$$0 < g_{i_1 i_2 \ldots i_k} \leqslant 1, \quad 0 < \hat{g}_{i_1 i_2 \ldots i_k} \leqslant 1, \quad 0 < \hat{g}_0 \leqslant 1. \tag{4}$$

Тогда

а) ветвящаяся цепная дробь

$$v = \frac{\hat{g}_0 \mid}{\mid 1} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{(1-g_{i_1 i_2 \ldots i_k})\hat{g}_{i_1 i_2 \ldots i_k} x_{i_1 i_2 \ldots i_k} \mid}{\mid 1} \tag{5}$$

равномерно сходится для $|x_{i_1 i_2 \ldots i_k}| \leqslant 1/N$ ($i_k = \overline{1, N}$; $k = 1, 2, \ldots$), если

$$\min_{i_1, i_2, \ldots, i_k} g_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \max_{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}} \hat{g}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} \quad (k = 1, 2, \ldots; \ \hat{g}_{i_0} = \hat{g}_0); \tag{6}$$

б) значение дроби (5) и ее подходящих дробей при выполнении условий (3) и (6) принадлежит кругу

$$|z| \leqslant 1 - 1/s, \tag{7}$$

где

$$s = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{q_1 q_2 \cdots q_p}{(1-q_1)(1-q_2)\cdots(1-q_p)} \tag{8}$$

и $q_k = \min\limits_{i_1, i_2, \ldots, i_k} g_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, причем значение бесконечной дроби (5) v равно $1 - 1/s$, когда

$$g_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \hat{g}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} = q_k, \quad x_{i_1 i_2 \ldots i_k} = -1/N \quad (i_k = \overline{1, N}; \quad k = 1, 2, \ldots);$$

в) значение дроби (5) и ее подходящих дробей принадлежит области

$$|z - (2-q_1)^{-1}| \leqslant (1-q_1)(2-q_1)^{-1}, \tag{9}$$

если выполняются условия (4), (6).

Доказательство. Используя формулу разности подходящих дробей [2], нетрудно показать, что обычная цепная дробь

$$\frac{q_1 \mid}{\mid 1} - \frac{q_2(1-q_1) \mid}{\mid 1} - \frac{q_3(1-q_2) \mid}{\mid 1} - \cdots \tag{10}$$

является мажорантой ветвящейся цепной дроби (5). Справедливость утверждений а) — в) следует из справедливости аналогичных утверждений для дроби (10) [3].

Теорема 2. Пусть $x_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ ($i_k = \overline{1, N}$; $k = 1, 2, \ldots$) — комплексные переменные, $g_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ ($i_k = \overline{1, N}$; $k = 2, 3, \ldots$), $\hat{g}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ ($i_k = \overline{1, N}$; $k = 1$, 2, ...) — действительные константы такие, что $0 \leqslant g_{i_1 i_2 \dots i_k} < 1$, $0 \leqslant \hat{g}_{i_1 i_2 \dots i_k} < 1$. Тогда

а) ветвящаяся цепная дробь

$$v = \frac{1|}{|1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{\hat{g}_{i_1} x_{i_1}|}{|1} + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{(1 - g_{i_1 i_2 \dots i_k})\hat{g}_{i_1 i_2 \dots i_k} x_{i_1 i_2 \dots i_k}|}{|1} \quad (11)$$

сходится равномерно для $|x_{i_1 i_2 \dots i_k}| \leqslant 1/N$ $(i_k = \overline{1, N};\ k = 1, 2, \dots)$, если ряд (8) сходится, где

$$q_p = \max_{i_1, i_2, \dots, i_p} \hat{g}_{i_1 i_2 \dots i_p} = \min_{i_1, i_2, \dots, i_{p+1}} g_{i_1 i_2 \dots i_{p+1}} \quad (p = 1, 2, \dots); \quad (12)$$

б) значение дроби (11) и ее подходящих дробей принадлежит кругу $|z| \leqslant s$, где s определяется по формуле (8).

Доказательство. Для произвольного индекса i_1 $(i_1 = \overline{1, N})$ рассмотрим ветвящуюся цепную дробь

$$v_{i_1} = \frac{\hat{g}_{i_1}|}{|1} + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{(1 - g_{i_1 i_2 \dots i_k})\, \hat{g}_{i_1 i_2 \dots i_k} x_{i_1 i_2 \dots i_k}|}{|1} \cdot \quad (13)$$

Для нее выполняются условия теоремы 1, поэтому дробь (13) равномерно сходится для всех $|x_{i_1 i_2 \dots i_k}| \leqslant 1/N$ $(i_k = \overline{1, N};\ k = 2, \dots)$ и ее множество значений содержится в круге (7). Если предположить теперь, что $|x_{i_1}| \leqslant 1/N$ и ряд (8) сходится, то отсюда следует, что дробь (11) равномерно сходится и ее множество значений содержится в круге $|z| \leqslant s$.

Теорема 3. Если $0 < g_{i_1 i_2 \dots i_k} < 1$ $(i_k = \overline{1, N};\ k = 2, 3, \dots)$, $0 < \hat{g}_{i_1 i_2 \dots i_k} < 1$ $(i_k = \overline{1, N};\ k = 1, 2, \dots)$ и ряд (8) расходится, то ветвящаяся цепная дробь (11) сходится для всех $|x_{i_1 i_2 \dots i_k}| \leqslant 1/N$ $(i_k = \overline{1, N};\ k = 1, 2, \dots)$ при условии, что существует такой номер p, для которого выполняется по крайней мере одно из условий

1) $x_{i_1 i_2 \dots i_p} \neq -1/N$ при некотором наборе индексов $i_1, i_2, \dots, i_p$;

2) не все $g_{i_1 i_2 \dots i_p}$ или не все $\hat{g}_{i_1 i_2 \dots i_p}$ равны между собой.

Доказательство. При введении обозначений

$$\frac{\hat{g}_{i_1} x_{i_1}}{q_1} = y_{i_1}\ (i_1 = 1,\ N), \quad \frac{(1 - g_{i_1 i_2 \dots i_k})\hat{g}_{i_1 i_2 \dots i_k} x_{i_1 i_2 \dots i_k}}{(1 - q_{k-1})\, q_k} = y_{i_1 i_2 \dots i_k}$$

$$(i_k = \overline{1, N};\quad k = 2, 3, \dots) \quad (14)$$

ветвящаяся цепная дробь (11) запишется в виде

$$z = \frac{1|}{|1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{q_1 y_{i_1}|}{|1} + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{q_k (1 - q_{k-1})\, y_{i_1 i_2 \dots i_k}|}{|1} \cdot \quad (15)$$

Так как все $|y_{i_1 i_2 \dots i_k}| \leqslant 1/N$, то согласно теореме 1 дроби

$$z_{i_1} = \frac{q_1|}{|1} + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{q_k (1 - q_{k-1})\, y_{i_1 i_2 \dots i_k}|}{|1}$$

сходятся. Если докажем, что из расходимости (11) следует выполнение равенств $y_{i_1 i_2 \dots i_p} = -1/N$ $(i_p = \overline{1, N};\ p = 1, 2, \dots)$, то тем самым убедимся в справедливости теоремы 3. Так как ряд (8) расходится, то согласно утверждению б) теоремы 1 имеем $|z_{i_1}| \leqslant 1$ $(i_1 = \overline{1, N})$. Поэтому $\left|\sum_{i_1=1}^{N} z_{i_1} y_{i_1}\right| \leqslant 1$. Из расходимости дроби (11) заключаем, что $\sum_{i_1=1}^{N} z_{i_1} y_{i_1} =$

$= -1$, но $|z_{i_1}| \leqslant 1$ и $|y_{i_1}| \leqslant 1/N$ $(i_1 = \overline{1, N})$. Следовательно, $|z_{i_1}| = 1$, $|y_{i_1}| = 1/N$ и $y_{i_1} z_{i_1} = -1/N$ для произвольного индекса i_1 $(i_1 = \overline{1, N})$. Если же $|z_{i_1}| = 1$, то из утверждения в) теоремы 1 следует, что $z_{i_1} = 1$, и поэтому $y_{i_1} = -1/N$ $(i_1 = \overline{1, N})$. Пусть

$$z_{i_1} = \frac{q_1}{1 + (1 - q_1) \sum\limits_{i_2=1}^{N} z_{i_1 i_2} y_{i_1 i_2}}, \quad \text{где } z_{i_1 i_2} = \frac{q_2}{1 + \sum\limits_{i_3=1}^{N} \frac{(1 - q_2)\, q_3 y_{i_1 i_2 i_3}}{1 + \dots}}.$$

Так как $z_{i_1} = 1$ $(i_1 = \overline{1, N})$, то $1 + (1 - q_1) \sum\limits_{i_2=1}^{N} z_{i_1 i_2} y_{i_1 i_2} = q_1$, откуда $\sum\limits_{i_2=1}^{N} z_{i_1 i_2} y_{i_1 i_2} = -1$. Повторяя предыдущие рассуждения, убеждаемся в том, что $z_{i_1 i_2} = -1$, $y_{i_1 i_2} = -1/N$ для произвольного набора индексов i_1, i_2 $(i_k = \overline{1, N};\ k = 1, 2, \dots)$ и т. д.

Следствие. Если $0 \leqslant g_{i_1 i_2 \dots i_k} < 1$ $(i_k = \overline{1, N};\ k = 2, 3, \dots)$, $0 \leqslant \hat{g}_{i_1 i_2 \dots i_k} < 1$ $(i_k = \overline{1, N};\ k = 1, 2, \dots)$ или $0 < g_{i_1 i_2 \dots i_k} \leqslant 1$ $(i_k = \overline{1, N};\ k = 2, 3, \dots)$, $0 < \hat{g}_{i_1 i_2 \dots i_k} \leqslant 1$ $(i_k = \overline{1, N};\ k = 1, 2, \dots)$, то ветвящаяся цепная дробь (11) сходится равномерно для $|x_{i_1}| \leqslant r < 1/N$ $(i_1 = \overline{1, N})$, $|x_{i_1 i_2 \dots i_k}| \leqslant 1/N$ $(i_k = \overline{1, N};\ k = 2, 3)$.

Теорема 4. Ветвящаяся цепная дробь

$$b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1\,|}{|\, b_{i_1 i_2 \dots i_k}} \tag{16}$$

с комплексными элементами $b_{i_1 i_2 \dots i_k}$ сходится, если выполняются условия

$$\frac{1}{\beta_{2k-1}} + \frac{1}{N\beta_{2k}} \leqslant \frac{1}{N}, \tag{17}$$

где $\beta_k = \min\limits_{i_1, i_2, \dots, i_k} |b_{i_1 i_2 \dots i_k}|$; N — число веток ветвления дроби (16).

Доказательство. Ветвящуюся цепную дробь (16), используя эквивалентные преобразования [1], приводим к виду

$$b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{c_{i_1 i_2 \dots i_k}\,|}{|\, 1}, \tag{18}$$

где $c_{i_1} = 1/b_{i_1}$ $(i_1 = \overline{1, N})$; $c_{i_1 i_2 \dots i_k} = \dfrac{1}{b_{i_1 i_2 \dots i_k} b_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}}$ $(i_k = \overline{1, N};\ k = 2, 3, \dots)$. Пусть $p_{2n-1} = p_{2n} = \beta_{2n}$ и $q_n = (1 - 1/p_n)$ $(n = 1, 2, \dots)$. Тогда, очевидно, $0 < q_n < 1$, так как $p_n > 1$ согласно (17). Если докажем справедливость оценки

$$|c_{i_1 i_2 \dots i_k}| = \frac{1}{|b_{i_1 i_2 \dots i_k}|\,|b_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}|} \leqslant \frac{1}{\beta_k \beta_{k-1}} \leqslant \frac{1}{N}(1 - q_{k-1})\, q_k \quad (i_k = \overline{1, N};\ k = 2, 3, \dots),$$

то в силу предыдущих теорем сможем заключить, что ветвящаяся цепная дробь (16) сходится. Учитывая (17) имеем $\dfrac{1}{\beta_{2k-1}} \leqslant \dfrac{1}{N}\left(1 - \dfrac{1}{\beta_{2k}}\right) = \dfrac{\beta_{2k} - 1}{N\beta_{2k}}$. Поэтому

$$(\beta_{2k-1}\beta_{2k})^{-1} \leqslant (\beta_{2k} - 1) N^{-1} \beta_{2k}^{-2} = (p_{2k} - 1)(N p_{2k} p_{2k-1})^{-1} = N^{-1}(1 - q_{2k-1})\, q_{2k},$$

$$(\beta_{2k}\beta_{2k+1})^{-1} \leqslant (\beta_{2k+2} - 1)(N\beta_{2k}\beta_{2k+2})^{-1} = (p_{2k+1} - 1)(Np_{2k}p_{2k+1})^{-1} = N^{-1}(1 - q_{2k})\,q_{2k+1}.$$

Теорема 5. Ветвящаяся цепная дробь

$$\frac{1|}{|1} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i_1 i_2 \ldots i_k}|}{|\quad 1} \tag{19}$$

с комплексными частными числителями $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ сходится, если для произвольного натурального n

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| < \frac{1}{N} \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{20}$$

где $\alpha_k = \max\limits_{i_1 i_2, \ldots, i_k} |a_{i_1 i_2 \ldots i_k}|$; N — число веток ветвления дроби (19).

Доказательство теоремы основано на такой лемме.

Лемма [3]. Пусть $c_1, c_2, c_3, \ldots$ — неотрицательные числа такие, что для произвольного натурального n справедливо неравенство $\sum\limits_{p=1}^{n} c_p < 1$. Тогда существуют числа q_p $(0 \leqslant q_p < 1;\ p = 1, 2, \ldots)$ такие, что

$$c_1 = q_1, \ c_p = (1 - q_{p-1})\,q_p \quad (p = 2, 3, \ldots).$$

Используя неравенство (20) и утверждение леммы, заключаем, что существуют неотрицательные числа $q_1, q_2, q_3, \ldots$ $(0 \leqslant q_k < 1;\ k = 1, 2, \ldots)$ такие, что $N\alpha_1 = q_1$, $N\alpha_2 = (1 - q_1)\,q_2$, ..., $N\alpha_k = (1 - q_{k-1})\,q_k$ $(k = 2, 3, \ldots)$. Поэтому $a_{i_1} = q_1 x_{i_1}, \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k} = (1 - q_{k-1})\,q_k x_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, где $|x_{i_1 i_2 \ldots i_k}| \leqslant 1/N$. Если для некоторого натурального p $\alpha_p = 0$, то отсюда следует, что $q_p = 0$ и дробь (19) сходится согласно теореме 2. Если же $\alpha_p \neq 0$ $(p = 1, 2, \ldots)$, то, положив

$$q_n = 1 - \sum_{p=n+1}^{\infty} N\alpha_p \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{21}$$

получим

$$(1 - q_n)\,q_{n+1} = \left(\sum_{p=n+1}^{\infty} N\alpha_p\right)\left(1 - \sum_{p=n+2}^{\infty} N\alpha_p\right) = N\left(\alpha_{p+1} + \sum_{p=n+2}^{\infty} \alpha_p\right) \times$$
$$\times \left(1 - N \sum_{p=n+2}^{\infty} \alpha_p\right) = N\alpha_{n+1} + \left(N \sum_{p=n+2}^{\infty} \alpha_p\right)\left(1 - N \sum_{p=n+1}^{\infty} \alpha_p\right) \geqslant$$
$$\geqslant N\alpha_{n+1} \geqslant N\,|a_{i_1 i_2 \ldots i_{n+1}}|$$

для произвольного набора индексов $i_1, i_2, \ldots, i_{n+1}$. Из (21) следует, что $0 \leqslant q_0 < 1$, $0 < q_p < 1$ $(p = 1, 2, \ldots)$, и поэтому $\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k} = (1 - q_{k-1}) \times q_k x_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ $(i_k = \overline{1, N};\ k = 1, 2, \ldots)$, где $|x_{i_1}| \leqslant 1/N$; $|x_{i_1 i_2 \ldots i_k}| < 1/N$ $(i_k = \overline{1, N};\ k = 2, 3, \ldots)$. Если $q_0 = 0$, то ветвящаяся цепная дробь (19) сходится согласно теореме 2 или теореме 3, если же $q_0 > 0$, то сходимость дроби (19) следует из сходимости дроби (5) согласно теореме 1.

Отметим, что теоремы 1—5 являются обобщением известных признаков сходимости обычных цепных дробей, в частности, теорема 1 — признака сходимости Скотта — Уолла, теорема 2 — признака сходимости Ван Флека, теорема 4 — признака сходимости Прингсхейма, теорема 5 — признака сходимости Коха [3].

1. *Боднарчук П. І., Скоробогатько В. Я.* Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування.— К.: Наук. думка, 1974.— 271 с.
2. *Боднар Д. І.* Аналог ознаки збіжності Ворпіцького для гіллястих ланцюгових дробів.—

В кн.: Питання якісної теорії диференціальних рівнянь та їх застосування. К. : Ін-т математики АН УРСР, 1978, с. 7—8.
3. *Wall H. S.* Analytic theory of continued fractions.— New York : D. Van Nostrand comp., 1948.— 433 p.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР
Поступила в редколлегию 29.09.80

УДК 514.752.6

Р. Я. Мацюк

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ ВИНТОВЫХ ЛИНИЙ В ПЛОСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть $T^{(n)}E$ обозначает пространство n-скоростей над (псевдо)евклидовым пространством E размерности n. Если $x^1, \ldots, x^n$ суть канонические координаты в E, при которых последняя компонента вектор-столбца $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ входит с положительным знаком в его скалярный квадрат, то пусть $x^{(0)}, \ldots, x^{(n)}$ обозначают естественные координаты в $T^{(n)}E$, где каждое $x^{(s)}$ — это столбец высоты n, а $x^{(0)}$ совпадает с $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$. Любой элемент пространства $T^{(n)}E$ можно получить, рассматривая параметрически заданную кривую $x(\tau)$ класса C^∞ в пространстве E и полагая $x^{(0)} = x(0), \ldots, x^{(n)} = \frac{d^n x}{d\tau^n}(0)$, если 0 принадлежит интервалу изменения параметра. Пусть теперь открытое множество U в $T^{(n)}E$ определяется совокупностью условий:

$$\begin{gathered} \|x^{(1)}\| \neq 0, \\ \|x^{(1)} \wedge x^{(2)}\| \neq 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \|x^{(1)} \wedge \ldots \wedge x^{(n-1)}\| \neq 0. \end{gathered}$$

Здесь и далее для столбцов типа $a^{(s)} = \begin{pmatrix} a^{(s)1} \\ \vdots \\ a^{(s)n} \end{pmatrix}$, $b^{(s)} = \begin{pmatrix} b^{(s)1} \\ \vdots \\ b^{(s)n} \end{pmatrix}$ использована сокращенная запись

$$a^{(1)} \wedge \cdots \wedge a^{(l)} \cdot b^{(1)} \wedge \cdots \wedge b^{(l)} = \det \begin{pmatrix} a^{(1)}\, b^{(1)} & \ldots & a^{(1)}\, b^{(l)} \\ \vdots & & \vdots \\ a^{(l)}\, b^{(1)} & \ldots & a^{(l)}\, b^{(l)} \end{pmatrix},$$

где произведение столбцов $a^{(s)} \cdot b^{(s)}$ понимается в метрике пространства E и, как всегда, $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$ для произвольной матрицы $\mathbf{A}$.

На множестве U рассмотрим функции

$$K_1 = \frac{\|x^{(1)} \wedge x^{(2)}\|}{\|x^{(1)}\|^3},$$

$$K_l = \frac{\|x^{(1)} \wedge \cdots \wedge x^{(l+1)}\| \cdot \|x^{(1)} \wedge \cdots \wedge x^{(l-1)}\|}{\|x^{(1)} \wedge \cdots \wedge x^{(l)}\|^2 \cdot \|x^{(1)}\|} \quad (l = 2, \ldots, n-1),$$