ряет следующим начальным условиям:

$$K_\alpha^{[i]}(x, x) = 0, \quad i = \overline{0,\ 2n-2}; \quad K_\alpha^{[2n-1]}(x, x) = -1.$$

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение, левой частью которого является квазидифференциальное выражение (1):

$$l(y) \equiv y^{[2n]} = f(x), \tag{8}$$

а функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a, b]$. Тогда частное решение уравнения (8), удовлетворяющее начальным условиям

$$y^{[i]}(x_0) = 0, \quad i = \overline{0,\ 2n-1}, \quad x_0 \in [a, b],$$

определяется формулой

$$y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} K^*(x, \alpha) f(\alpha) d\alpha, \tag{9}$$

где $K^*(x, \alpha) = K(\alpha, x)$ — решение уравнения (3) с начальными условиями

$$K_x^{*[i]}(\alpha, \alpha) = 0, \quad i = \overline{0,\ 2n-2}, \quad K_x^{*[2n-1]}(\alpha, \alpha) = -1.$$

Для доказательства достаточно к левой и правой частям формулы (9) применить операцию $l(\ )$.

Отметим, что установленное выше фундаментальное свойство функции $K(x, \alpha)$ позволяет разработать качественно новые методы построения общих решений квазидифференциальных уравнений и исследования соответствующих краевых задач. На основании этого можно развивать, в частности, известные методы изучения статического и динамического поведения сложных упругих систем [2, 3, 5, 9].

1. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.— М.; Л. : Гостехиздат, 1950.— 318 с.
2. *Болотин В. В., Григолюк Э. И.* Устойчивость упругих и неупругих систем.— В кн.: Механика в СССР за 50 лет. М. : Наука, 1972, т. 3, с. 325—363.
3. *Гузь А. Н.* Об исследованиях по механике деформируемого твердого тела в Академии наук УССР.— Прикл. механика, 1978, 14, № 9, с. 3—14.
4. *Зорий Л. М.* К применению обобщенных функций в аналитических методах исследования сложных упругих систем.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 11, с. 991—994.
5. *Зорий Л. М.* К развитию аналитических методов исследования задач динамики упругих и гидроупругих систем.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 7, с. 16—20.
6. *Зорий Л. М.* Об одном фундаментальном свойстве функции влияния.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 9, с. 805—808.
7. *Зорий Л. М.* О новом методе построения общих решений линейных дифференциальных уравнений.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1979, № 5, с. 351—355.
8. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы.— М. : Наука, 1969.— 520 с.
9. *Образцов И. Ф., Онанов Г. Г.* Строительная механика скошенных тонкостенных систем.— М. : Машиностроение, 1973.— 659 с.
10. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений.— М. : Физматгиз, 1959.— 458 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 28.05.80

УДК 513.88

В. Э. Лянце, О. Г. Сторож

О НЕКОТОРЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ИЗМЕНЕНИЕМ ИХ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Все операторы, рассматриваемые в этой статье, предполагаются линейными и действующими в комплексных гильбертовых пространствах. При этом применяются следующие обозначения: $D(T)$, $R(T)$, $Z(T)$ — соответственно область определения, область значений и многообразие нулей оператора T; $(\cdot|\cdot)_T$, $\|\cdot\|_T$ — скалярное произведение и норма графика T, а $\oplus_T$,

$\ominus_T$ — символы ортогональной суммы и ортогонального дополнения относительно этого произведения; $T|D$ — сужение T на множество D; $\mathfrak{C}(H_1, H_2)$ — множество линейных, замкнутых, плотно заданных операторов $H_1 \to H_2$;

$$\mathcal{B}(H_1, H_2) = \{T \in \mathfrak{C}(H_1, H_2) : D(T) = H_1\};$$

$$\mathfrak{C}(H, H) = \mathfrak{C}(H), \quad \mathcal{B}(H, H) = \mathcal{B}(H);$$

T^* — оператор, сопряженный к T.

Пусть H — комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot|\cdot)$ и с нормой $\|\cdot\|$,

$$L, \ L_0 \in \mathfrak{C}(H), \quad L_0 \subset L. \tag{1}$$

Положим $M = L_0^*$, $M_0 = L^*$, $\mathfrak{H}_0 = D(L) \ \ominus_L D(L_0)$, $\mathfrak{G}_0 = D(M) \ominus \ominus D(M_0)$ и обозначим через $\Gamma_0\,(\Delta_0)$ ортопроектор из $D(L)\,(D(M))$ на $\mathfrak{H}_0\,(\mathfrak{G}_0)$. При этом имеется в виду ортогональность относительно скалярного произведения $(\cdot|\cdot)_L$ $((\cdot|\cdot)_M)$, превращающего $D(L)$ $(D(M))$ в гильбертово пространство. Отметим, что M, $M_0 \in \mathfrak{C}(H)$ и $M_0 \subset M$.

В настоящей работе установлен ряд результатов, аналогичных полученным в работе [5] для случая, когда $\dim \mathfrak{H}_0 < \infty$. Здесь рассмотрен и описан определенный класс возмущений некоторых сужений оператора L.

Абстрактная формула Грина.

Лемма 1. $L|\mathfrak{H}_0$ является унитарным относительно скалярных произведений $(\cdot|\cdot)_L$ и $(\cdot|\cdot)_M$ отображением из $\mathfrak{H}_0$ на $\mathfrak{G}_0$, обратным которому является $-M|\mathfrak{G}_0$.

В частности,

$$D(M) = D(M_0) \oplus_M L\mathfrak{H}_0. \tag{2}$$

Это утверждение доказано в работе [5].

Определение 1. Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, а $W \in \mathcal{B}(D(L), \mathfrak{H})$. Пара $(\mathfrak{H}, W)$ называется краевой (или граничной) для (L, L_0), если $Z(W) = D(L_0)$, $R(W) = \mathfrak{H}$. Элементы этой пары назовем соответственно краевым пространством и основным краевым оператором.

Лемма 2. Для всех L, L_0, удовлетворяющих условиям (1), краевая пара существует и единственна в следующем смысле: если $(\mathfrak{H}, W)$ и $(\hat{\mathfrak{H}}, \hat{W})$ — краевые пары для (L, L_0), то существует такое $E \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}, \hat{\mathfrak{H}})$, что $E^{-1} \in \mathcal{B}(\hat{\mathfrak{H}}, \mathfrak{H})$ и $\hat{W} = EW$.

Доказательство. Пара $(\mathfrak{H}_0, \Gamma_0)$ является краевой для (L, L_0). Единственность следует из определения 1 и леммы о тройке [3].

Теорема 1. Пусть $(\mathfrak{H}, \Gamma)$ и $(\mathfrak{G}, \Delta)$ — произвольные краевые пары для (L, L_0) и (M, M_0) соответственно. Существует единственное $B \in \mathcal{B}(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ такое, что $B^{-1} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{G})$ и для всех $y \in D(L)$, $z \in D(M)$

$$(Ly\,|\,z) - (y\,|\,Mz) = (\Gamma y\,|\,B\Delta z)_{\mathfrak{H}}. \tag{3}$$

Доказательство. Если $(\mathfrak{H}, \Gamma) = (\mathfrak{H}_0, \Gamma_0)$, $(\mathfrak{G}, \Delta) = (\mathfrak{G}_0, \Delta_0)$, то согласно лемме 1 (3) имеет место при $B = -M|\mathfrak{G}_0$. В общем случае согласно лемме 2 $\Gamma_0 = E\Gamma$, $\Delta_0 = F\Delta$, где $E \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_0)$, $F \in \mathcal{B}(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_0)$, поэтому (3) выполняется при $B = -E^*M|\mathfrak{G}_0F$.

Следствие 1. Если $(\mathfrak{H}, W)$ — краевая пара для (L, L_0), $\mathfrak{G}$ — гильбертово пространство, $I \in \mathcal{B}(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$, $I^{-1} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{G})$, то существует единственное $U \in \mathcal{B}(D(M), \mathfrak{G})$ такое, что $(\mathfrak{G}, U)$ — граничная пара для (M, M_0) и для всех $y \in D(L)$, $z \in D(M)$

$$(Ly\,|\,z) - (y\,|\,Mz) = (Wy\,|\,IUz)_{\mathfrak{H}}. \tag{4}$$

Для доказательства достаточно применить теорему 1 при $\Gamma = W$.

Следствие 2. Пусть $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ — гильбертовы пространства, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_2 \oplus \mathfrak{H}_1$, $(\mathfrak{H}, W)$ — граничная пара для (L, L_0). Существует единственное $\tilde{W} \in \mathcal{B}(D(M), \mathfrak{G})$ такое, что $(\mathfrak{G}, \tilde{W})$ является граничной парой для

(M, M_0) и для всех $y \in D(L)$, $z \in D(M)$

$$(Ly\,|\,z) - (y\,|\,Mz) = (W_1 y\,|\,\tilde{W}_2 z)_{\mathfrak{H}_1} - (W_2 y\,|\,\tilde{W}_1 z)_{\mathfrak{H}_2}, \qquad (5)$$

где

$$Wy = (W_1 y, W_2 y), \quad y \in D(L); \quad \tilde{W} z = (\tilde{W}_1 z, \tilde{W}_2 z),$$

$$z \in D(M); \quad W_1(y), \quad \tilde{W}_2 z \in \mathfrak{H}_1; \quad W_2(y), \quad \tilde{W}_1 z \in \mathfrak{H}_2.$$

Справедливость этого утверждения вытекает из следствия 1 при $I = I_0$, где $I_0(h_2, h_1) = (h_1, -h_2)$, $h_i \in \mathfrak{H}_i$, $i = 1, 2$.

Каждое из соотношений (3) — (5) будем называть абстрактной формулой Грина. Установим некоторые соотношения между операторами, стоящими в правых частях этих формул. Для этого условимся о следующем обозначении. Пусть D — одно из пространств $D(L)$ или $D(M)$, G — произвольное гильбертово пространство, $W \in \mathcal{B}(D, G)$. Через W' обозначим оператор, сопряженный к W. Если, кроме того, существует оператор, сопряженный к W, рассматриваемому как отображение $H \to G$, то последний будет обозначаться через W^* таким образом:

$$(y\,|\,W^* h) = (Wy\,|\,h)_G = (y\,|\,W' h)_D, \quad h \in G, \quad y \in D.$$

Теорема 2. Пусть $(\mathfrak{H}, W)$ и $(\mathfrak{G}, U)$ — граничные пары соответственно для (L, L_0) и (M, M_0), $I \in B(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$, $I^{-1} \in B(\mathfrak{H}, \mathfrak{G})$.

Следующие утверждения эквивалентны:

а) для всех $y \in D(L)$, $z \in D(M)$ имеет место (4);

б) $W' I U/\mathfrak{G}_0 = -M\,|\,\mathfrak{G}_0$; в) $ULW' = I^{-1}$;

г) $U^* I^* W\,|\,\mathfrak{H}_0 = L\,|\,\mathfrak{H}_0$; д) $WMU' = -(I^*)^{-1}$.

Доказательство. Ясно, что достаточно показать эквивалентность утверждений а) — в). Итак, пусть имеет место а). Тогда имеет место и б), так как в этом случае $(y\,|\,W' I U z)_L = (Wy\,|\,IU|z)_{\mathfrak{H}} = (Ly\,|\,z) - (y\,|\,Mz) = (y\,|\,-Mz)_L$ при $y \in D(L)$, $z \in \mathfrak{G}_0$. Если же известно, что имеет место б), то, применяя лемму 1, находим, что $(U|\,\mathfrak{G}_0)^{-1} I^{-1} (W')^{-1} = L\,|\,\mathfrak{H}_0$, откуда следует в). Наконец, пусть выполняется в). Применяя лемму 1, убеждаемся, что выполняется и б). Поэтому для всех $y \in \mathfrak{H}_0$, $z \in \mathfrak{G}_0$ $(Ly\,|\,z) - (y\,|\,Mz) = -(y\,|\,Mz)_L = (y\,|\,W' I U z)_L = (Wy\,|\,IUz)_{\mathfrak{H}}$.

Если же $y \in D(L_0)$ или $z \in D(M_0)$, то обе стороны равенства (4) обращаются в нуль. Теорема доказана.

Следствие 3. Пусть $(\mathfrak{H}, W)$, $(\mathfrak{G}, \tilde{W})$, I_0 те же, что и в следствии 2. Следующие утверждения эквивалентны: а) для всех $y \in D(L)$, $z \in D(M)$ имеет место (5); б) $W' I_0 \tilde{W}/\mathfrak{G}_0 = -M/\mathfrak{G}_0$; в) $\tilde{W}_1 L W_1' = 0$, $\tilde{W}_1 L W_2' = -I_{\mathfrak{H}_2}$, $\tilde{W}_2 L W_1' = I_{\mathfrak{H}_1}$, $\tilde{W}_2 L W_2' = 0$; г) $\tilde{W} I_0^* W/\mathfrak{H}_0 = L/\mathfrak{H}_0$; д) $W_1 M \tilde{W}_1' = 0$, $W_1 M \tilde{W}_2' = -I_{\mathfrak{H}_1}$, $W_2 M \tilde{W}_1' = I_{\mathfrak{H}_2}$, $W_2 M W_2' = 0$.

Для доказательства достаточно применить теорему 2 при $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_2 \oplus \mathfrak{H}_1$, $I = I_0$.

Отметим, что в случае, когда $L = M$, а L_0 имеет равные дефектные числа, понятие граничной пары фактически использовалось многими авторами (см., например, работы [1, 4, 6]).

Гладкие сужения и почти ограниченные возмущения.

Определение 2. Сужение $\hat{L}$ оператора L называется гладким (относительно (L, L_0)), если $\hat{L} \in \mathfrak{C}(H)$ и $D(\hat{L}^*) \subset D(M)$.

Определение 3. Оператор $V \in \mathcal{B}(D(L), H)$ назовем почти ограниченным (относительно (L, L_0)), если $V|D(L_0)$ имеет расширение, принадлежащее $\mathcal{B}(H)$.

В настоящем пункте исходя из понятия краевой пары дано описание почти ограниченных возмущений гладких сужений $\hat{L}$ оператора L, удовлетворяющих условию

$$D(\hat{L}^*) - \|\cdot\|_M\text{-замкнута}, \tag{6}$$

которое автоматически выполняется в случае конечномерного $\mathfrak{H}_0$. При этом применяются следующие утверждения:

Лемма 3. Пусть G — гильбертово пространство и $V \in \mathcal{B}(D(L), G)$. Следующие условия эквивалентны:

а) $V|D(L_0)$ является $H \to G$ ограниченным;

б) $LR(V') \subset D(M)$;

в) существуют такие $V_0 \in \mathcal{B}(D(L), G)$, $V_1 \in \mathcal{B}(H, G)$, что $Z(V_0) \supset D(L_0)$; $V = V_0 + V_1$.

Следствие 4. В условиях леммы 3

$$LR(V_1') \subset D(M_0), \ V_0' = -M\Delta_0 LV'.$$

Перейдем к изложению основных результатов.

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{H}$ — краевое пространство для (L, L_0) и $T = \hat{L} + \hat{V}$, где $\hat{L}$ — гладкое сужение L, удовлетворяющее условию (6), а $\hat{V}$ почти ограничен. Существуют ортогональное разложение $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ и операторы $W_i \in \mathcal{B}(D(L), \mathfrak{H}_i)$, $\Phi_i \in \mathcal{B}(H, \mathfrak{H}_i)$, $i = 1, 2$, $V \in \mathcal{B}(H)$ такие, что $(\mathfrak{H}, W_1 + W_2)$ является граничной парой для (L, L_0),

$$\begin{gathered} R(W_1 - \Phi_1) = R(W_1) = \mathfrak{H}_1, \\ D(T) = \{y \in D(L) : W_1 y = \Phi_1 y\}, \end{gathered} \tag{7}$$

$$Ty = Ly + \Phi_2^* W_2 y + Vy, \quad y \in D(T). \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $A = D(L) \ominus_L D(\hat{L})$, $B = D(\hat{L}^*) \ominus_M \ominus_M D(M_0)$, $M_1 = M | D(\hat{L}^*)$, $L_1 = M_1^*$. Отметим, что $L_0 \subset L_1 \subset L$, $M_0 \subset M_1 \subset M$, $L_1, M_1 \in \mathfrak{C}(H)$.

Применяя лемму 1, получаем

$$D(M_1) = D(\hat{L}^*) = D(M_0) \oplus_{\hat{L}^*} LA = D(M_0) \oplus_M B, \tag{9}$$

$$D(L) = D(L_1) \oplus_L MB. \tag{10}$$

Обозначим через P_A соответственно P_{MB}, $\|\cdot\|_L$ — ортопроектор из $D(L)$ на A соответственно MB, и рассмотрим оператор $F = -M\Delta_0 LP_A$. Нетрудно показать, что $F \in \mathcal{B}(D(L), \mathfrak{H}_0)$. Это следует из (9), унитарности $L|A$ и $M|B$ в соответствующих пространствах (см. лемму 1), а также из эквивалентности норм $\|\cdot\|_{M_1}$ и $\|\cdot\|_{\hat{L}^*}$. Последнее вытекает из (6). Кроме того, непосредственная проверка показывает, что $Z(F) = D(\hat{L})$, $R(F) = MB$. Таким образом, F, а значит, и F' [6] нормально разрешимы, поэтому $LR(F') = LA \subset \subset D(M)$. Применяя лемму 3, убеждаемся, что $F = F_0 - F_1$, где $Z(F_0) \supset \supset D(L_0)$; $F_1 \in \mathcal{B}(H, \mathfrak{H}_0)$. Так как в силу следствия 4 $F_0' = -M\Delta_0 LF'$, то $R(F_0') = MB$, $Z(F_0') = \mathfrak{H}_0 \ominus_L MB$, а значит,

$$Z(F_0) = D(L) \ominus_L MB = D(L_1), \quad R(F_0) = MB. \tag{11}$$

Отсюда и из леммы о тройке следует существование оператора $\hat{\Phi} \in \mathcal{B}(H, \mathfrak{H}_0)$ такого, что $D(T) = D(\hat{L}) = Z(P_{MB} - \hat{\Phi})$, $R(P_{MB} - \Phi) = R(P_{MB}) = MB$.

Пусть E — некоторый (существующий в силу леммы 2) унитарный оператор $\mathfrak{H}_0 \to \mathfrak{H}$. Для доказательства теоремы достаточно положить $\mathfrak{H}_1 = EMB$, $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1$, $E_1 = E|MB$, $E_2 = E|\mathfrak{H}_0 \ominus MB$, $W_1 = E_1 P_{MB}$, $W_2 = E_2(\Gamma_0 - P_{MB})$, $\Phi_1 = E_1\hat{\Phi}$, $\Phi_2 = (V_0 E_2^{-1})^*$, $V = V_0\hat{\Phi} + V_1$, где $\hat{V} = V_0 + V_1$, $Z(V_0) \supset D(L_0)$, $V_1 \in B(H)$ (см. лемму 3).

Замечание 1. В условиях доказанной теоремы $D(L_1) = Z(W_1)$, поэтому $\hat{L}$ можно интерпретировать как возмущение оператора L_1, изменяющее, однако, не закон L его действия, а оператор краевых условий W_1, т. е. область определения.

Имеет место и утверждение, обратное теореме 3. Его доказательству предпошлем ряд вспомогательных факторов.

Лемма 4. Пусть $\mathfrak{H}_1$ — гильбертово пространство, $W_1 \in \mathscr{B}(D(L), \mathfrak{H}_1)$, $R(W_1) = \mathfrak{H}_1$, $Z(W_1)$ плотно в H, $\Phi_1 \in \mathscr{B}(H, \mathfrak{H}_1)$ и $R(W_1 - \Phi_1)$ замкнуто в $\mathfrak{H}_1$. Тогда $R(W_1 - \Phi_1) = \mathfrak{H}_1$ и $Z(W_1 - \Phi_1)$ плотно в H.

Доказательство. Предположим, что для некоторого $h \in \mathfrak{H}_1$ и для всех $y \in D(L)$ $((W_1 - \Phi_1)y \mid h)_{\mathfrak{H}_1} = 0$. Тогда для всех $y \in z(W_1)$ (а следовательно, для всех $y \in D(L)$) $(\Phi_1 y / h)_{\mathfrak{H}_1} = 0$. Поэтому $(W_1 y \mid h)_{\mathfrak{H}_1} = 0$ при $y \in D(L)$, откуда следует справедливость первого утверждения.

Для доказательства второго предположим, что при некотором $f \in H$ и при всех $y \in Z(W_1 - \Phi_1)$ $(y \mid f) = 0$. Пусть $D = \{y \in D(L),\ W_1 y - \Phi_1 y \in \overline{R(\Phi_1)}\}$, $l[y] = (y \mid f)$, $y \in D$. Ясно, что D — $\|\cdot\|$-замкнуто. Далее, так как $Z(W_1 - \Phi_1) \subset Z(l) \subset D$, то, применяя еще раз лемму о тройке, убеждаемся в существовании $l \in \mathfrak{H}_1$ такого, что $(y \mid f) = ((W_1 - \Phi_1)\, y \mid e)_{\mathfrak{H}_1}$, $y \in D$. Отсюда, рассуждая так же, как при доказательстве первого утверждения леммы, делаем вывод, что при всех $y \in D$ $(W_1 y \mid e)_{\mathfrak{H}_1} = 0$, а следовательно (так как $W_1 D = \overline{R(\Phi_1)}$), $(\Phi_1 y \mid e)_{\mathfrak{H}_1} = 0$. Таким образом, $(y \mid f) = 0$ при $y \in D$. Но $D \supset Z(W_1)$, поэтому $f = 0$. Лемма доказана.

Лемма 5. Если $\mathfrak{H}_i$, W_i, Φ_i, $i = 1, 2$, V такие, как в теореме 3, а оператор T определяется соотношениями (7)—(8), то

а $D(T) = D(L \mid D(T))$ плотно в H;

б $D((L \setminus D(T)^*) \subset D(M)$, $D(T^*) \subset D(M)$;

в $D(T^*) = \{z \in D(M) : \tilde{W}_1 z = \Phi_2 z\}$, (12)

$$T^* z = Mz + \Phi_1^* \tilde{W}_2 z + V^* z,\quad z \in D(M), \tag{13}$$

где $\tilde{W}_1$, W_2 определяются (однозначно) по W_1, W_2 из следствия 2.

Доказательство с учетом изложенных выше результатов может быть проведено по схеме, предложенной в работе [5] для случая, когда $\mathfrak{H}_0$ конечномерно.

Теорема 4. В условиях леммы 5 T является почти ограниченным возмущением гладкого сужения $\hat{L}$ оператора L (относительно (L, L_0)), удовлетворяющего условию (6), а T^* является почти ограниченным возмущением гладкого сужения $\hat{M}$ оператора M (относительно (M, M_0)) такого, что $D(\hat{M}^*)$ — $\|\cdot\|_L$-замкнуто, тогда и только тогда, когда

$$R(\tilde{W}_1 - \Phi_2) = \mathfrak{H}_2. \tag{14}$$

Кроме того, из (14) следует, что $T \subset \mathfrak{C}(H)$.

Доказательство. Применяя лемму 5 для случая, когда $V = 0$, $\Phi_2 = 0$, видим, что $D((L \mid D(T))^*) = Z(\tilde{W}_1)$. Так как $Z(W_1)$ — $\|\cdot\|_M$-замкнуто в $D(M)$, то первое утверждение имеет место. Далее, если (14) имеет место, то, применяя изложенные выше результаты к T^*, убеждаемся, что этот оператор удовлетворяет необходимым требованиям и что $T^{**} = T$, т. е. $T \in \mathfrak{C}(H)$.

Наконец, если известно, что оператор, определяемый соотношениями (12)—(13), является почти ограниченным возмущением гладкого сужения $\hat{M}$ оператора M (относительно (M, M_0)) такого, что $D(\hat{M}^*)$ — $\|\cdot\|_L$-замкнуто то в силу теоремы 3 существуют гильбертово пространство $\hat{\mathfrak{H}}$, $U \in B(D(M), \hat{\mathfrak{H}})$, $\Psi \in B(H, \hat{\mathfrak{H}})$ такие, что

$$R(U) = R(U - \Psi) = \hat{\mathfrak{H}},\ Z(U) \supset D(M_0),\ D(T^*) = Z(U - \Psi).$$

Отсюда и из леммы о тройке следует, что $\tilde{W}_1 - \Phi_2 = C(U - \Psi)$, где $C \in B(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_1)$; $Z(C) = \{0\}$. Теперь уже ясно, что (14) имеет место.

Замечание 2. Условия $R(W_1 - \Phi_1) = \mathfrak{H}_1$, $R(\tilde{W}_1 - \Phi_2) = \mathfrak{H}_2$ выполняются, например, тогда, когда операторы Φ_i, $i = 1, 2$ являются компактными [2] или достаточно малыми по норме.

1. *Горбачук М. Л.* Самосопряженные граничные задачи для дифференциального уравнения второго порядка с неограниченным операторным коэффициентом.— Функцион. анализ, 1971, 5, № 1, 10—21.
2. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.— М. : Мир, 1972.— 740 с.
3. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М. : Наука, 1976.— 542 с.
4. *Кочубей А. Н.* О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений.— Мат. заметки, 1975, 17, вып. 1, с. 41—48.
5. *Лянце В. Э.* О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве.— Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1972, вып. 16, с. 165—186.
6. *Рофе-Бекетов Ф. С.* Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций.— Докл. АН СССР, 1969, 184, № 5, с. 1034—1037.

Львовский университет
Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 19.11.79

УДК 517.524

Д. И. Боднар

ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ С ЧАСТНЫМИ ЗВЕНЬЯМИ ВИДА $\frac{(1 - g_{i_1 i_2 \dots i_k})\, \hat{g}_{i_1 i_2 \dots i_k} x_{i_1 i_2 \dots i_k}}{1}$

Для установления равномерной сходимости функциональных рядов существенное значение имеют мажорантные ряды. Аналогичная задача о построении мажорант, но в виде ветвящихся цепных дробей, возникает и при исследовании сходимости ветвящихся цепных дробей. В этой связи дадим некоторые определения.

Определение 1. Ветвящаяся цепная дробь

$$d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N_1} \frac{c_{i_1 i_2 \dots i_k}|}{|d_{i_1 i_2 \dots i_k}} \tag{1}$$

с комплексными элементами называется максимантой (минимантой) ветвящейся цепной дроби

$$b_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i_1 i_2 \dots i_k}(x)|}{|b_{i_1 i_2 \dots i_k}(x)} \tag{2}$$

с комплекснозначными элементами-функциями, заданными в некоторой области D, если для произвольного индекса n справедливо соотношение

$$\left|\frac{P_n}{Q_n}\right| \leqslant \left|\frac{C_n}{D_n}\right| \left(\left|\frac{P_n}{Q_n}\right| \geqslant \left|\frac{C_n}{D_n}\right|\right),$$

где P_n/Q_n, C_n/D_n — n-е подходящие дроби ветвящихся цепных дробей (2) и (1) соответственно.

Определение 2. Ветвящаяся цепная дробь (1) называется мажорантой (минорантой) ветвящейся цепной дроби (2), если при тех же предположени-