следующей оценкой в точке x_{n+2}:

$$\delta = \frac{y_n^h - y_n^{2h}}{15}.$$

Если $\delta < \varepsilon h$, где ε — необходимая точность в конце интервала интегрирования, то шаг увеличивается в два раза, а если $\delta > \varepsilon h$, то производим перевычисления с уменьшенным в два раза шагом.

1. *Бабушка И., Витасек Э., Прагер М.* Численные процессы решения дифференциальных уравнений.— М. : Мир, 1969.— 368 с.
2. *Боднарчук П. І., Скоробогатько В. Я.* Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування.— К. : Наук. думка, 1974.— 272 с.
3. *Холл Дж., Уатт Дж.* Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Мир, 1979.— 312 с.
4. *Dahlquist G. A* special stability problem for linear multistep methods.— BIT, 1963, 3, p. 27—43.
5. *Lambert J. D.* Computational methods in ordinary differential equations.— London etc: Wiley and Sons, 1973.— 278 p.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 01.04.80

УДК 517.9 : 539.3

М. Ф. Стасюк

О ФУНДАМЕНТАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ ФУНКЦИИ ВЛИЯНИЯ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В работе установлено, что общее решение квазидифференциального уравнения порядка $2n$ можно построить с помощью соответствующей функции влияния и ее последовательных квазипроизводных по параметру. Для обыкновенных дифференциальных уравнений указанное свойство функции влияния установлено в работе [6]; некоторым его применениям посвящены работы [4, 7].

Рассмотрим самосопряженное дифференциальное выражение

$$l(y) = (-1)^n (p_0 y^{(n)})^{(n)} + (-1)^{n-1} (p_1 y^{(n-1)})^{(n-1)} + \cdots + p_n y, \tag{1}$$

где функции $p_0^{-1}(x), \ldots, p_{n-1}(x), p_n(x)$ интегрируемы на некотором конечном промежутке $[a, b]$. Квазипроизводными функции $y(x)$, соответствующими дифференциальному выражению (1), называются функции $y^{[1]}(x), \ldots$ $\ldots, y^{[2n]}(x)$, которые определяются формулами [1, 8]

$$\begin{gathered} y^{[k]} = \frac{d^k y}{dx^k}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad y^{[n]} = p_0 \frac{d^n y}{dx^n}, \\ y^{[n+k]} = p_k \frac{d^{(n-k)}}{dx^{n-k}} y - \frac{d}{dx}(y^{[n+k-1]}). \end{gathered} \tag{2}$$

С дифференциальным выражением (1) можно связать соответствующее однородное квазидифференциальное уравнение

$$l(y) = 0, \tag{3}$$

причем $l(y)$ имеет смысл для данной функции $y(x)$, если все квазипроизводные ее до $(2n-1)$-го порядка включительно существуют и являются абсолютно непрерывными на промежутке $[a, b]$ функциями.

Для уравнения (3) имеет место теорема существования и единственности задачи Коши [8].

Аналогично, как и для обыкновенного дифференциального уравнения, рассмотрим функцию $K(x, \alpha)$, исходя из фундаментальной системы решений

$y_1(x), \ldots, y_{2n}(x)$ уравнения (3) и ее квазипроизводных:

$$K(x, \alpha) = \sum_{k=1}^{2n} y_k(x) z_k(\alpha), \tag{4}$$

где

$$z_k(\alpha) = (-1)^{2n+k} \frac{W[y_1(\alpha), \ldots, y_{k-1}(\alpha), y_{k+1}(\alpha), \ldots, y_{2n}(\alpha)]}{W[y_1(\alpha), y_2(\alpha), \ldots, y_{2n}(\alpha)]}, \tag{5}$$

а $W[y_1, y_2, \ldots, y_{2n}]$ — соответствующий определитель Вронского.

Отметим, что правая часть (4) представляет собой не что иное, как разложение определителя порядка $2n$ по элементам $y_1(x), \ldots, y_{2n}(x)$ последней строчки, причем $z_1(\alpha), \ldots, z_{2n}(\alpha)$ — соответствующие алгебраические дополнения. Известно [1], что $z_1(\alpha), \ldots, z_{2n}(\alpha)$ — также фундаментальная система решений уравнения (3) как функций переменной α.

Покажем, что функция (4) удовлетворяет таким начальным условиям:

$$K_x^{[i]}(\alpha, \alpha) = 0, \quad i = \overline{0, 2n-2}, \quad K_x^{[2n-1]}(\alpha, \alpha) = 1. \tag{6}$$

Действительно, продифференцировав выражение (4) последовательно n раз и положив $x = \alpha$, получим $n + 1$ соответствующих условий (6). Далее, для $1 \leqslant i \leqslant n - 1$, используя формулы (2), (5), получаем

$$K_x^{[n+i]}(x, \alpha) = p_i K_x^{(n-i)}(x, \alpha) - \frac{d}{dx}(K_x^{[n+i-1]}(x, \alpha)) =$$

$$= p_i \sum_{k=1}^{2n} y_k^{(n-i)}(x) z_k(\alpha) - \sum_{k=1}^{2n} \frac{d}{dx}(y_k^{[n+i-1]}(x)) z_k(\alpha) =$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} \left[p_i y_k^{[n-i]}(x) - \frac{d}{dx}(y_k^{[n+i-1]}(x))\right] z_k(\alpha) = \sum_{k=1}^{2n} y_k^{[n+i]}(x) z_k(\alpha).$$

Полагая здесь $x = \alpha$, убеждаемся в верности остальных условий (6).

Основное свойство функции Коши (функции влияния) квазидифференциального уравнения (3) аналогично, как и для обыкновенного дифференциального уравнения [6], выражает такая теорема.

Теорема. Функция $K(x, \alpha)$ и ее последовательные квазипроизводные по параметру α до $(2n - 1)$-го порядка включительно образуют фундаментальную систему решений квазидифференциального уравнения (3).

Для доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что имеют место следующие соотношения:

$$\sum_{k=1}^{2n} y_k^{[i]}(x) z_k^{[j]}(x) = \begin{cases} 0, & i + j < n - 1, \\ 1, & i + j = n - 1, \quad 0 \leqslant j \leqslant n - 1, \\ -1, & i + j = n - 1, \quad n \leqslant j \leqslant 2n - 1. \end{cases} \tag{7}$$

Справедливость этих соотношений легко проверить, следуя работе [10] и используя формулы (2) вместо обыкновенного дифференцирования. При этом за исходные данные берем равенства

$$\sum_{k=1}^{2n} y_k^{[i]}(x) z_k(x) = 0, \quad i = \overline{0, 2n-2}; \quad \sum_{k=1}^{2n} y_k^{[2n-1]}(x) z_k(x) = 1,$$

которые непосредственно следуют из формул (4), (6). Теперь из соотношений (4) и (7) следует, что соответствующий определитель Вронского в точке (произвольной) $x = \alpha$ интервала $[a, b]$ всегда равен единице:

$$W[K(x, \alpha), K_\alpha^{[1]}(x, \alpha), \ldots, K_\alpha^{[2n-1]}(x, \alpha)]|_{x=\alpha} = 1.$$

Следствие 1. Функция $K(x, \alpha)$ и ее последовательные квазипроизводные по x до $(2n - 1)$-го порядка включительно образуют фундаментальную систему решений уравнения (3) с измененным аргументом α вместо x.

Следствие 2. Решение $K(x, \alpha)$ уравнения (3) по аргументу α удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$K_\alpha^{[i]}(x, x) = 0, \quad i = \overline{0,\ 2n-2}; \quad K_\alpha^{[2n-1]}(x, x) = -1.$$

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение, левой частью которого является квазидифференциальное выражение (1):

$$l(y) \equiv y^{[2n]} = f(x), \tag{8}$$

а функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a, b]$. Тогда частное решение уравнения (8), удовлетворяющее начальным условиям

$$y^{[i]}(x_0) = 0, \quad i = \overline{0,\ 2n-1}, \quad x_0 \in [a, b],$$

определяется формулой

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} K^*(x, \alpha) f(\alpha) d\alpha, \tag{9}$$

где $K^*(x, \alpha) = K(\alpha, x)$ — решение уравнения (3) с начальными условиями

$$K_x^{*[i]}(\alpha, \alpha) = 0, \quad i = \overline{0,\ 2n-2}, \quad K_x^{*[2n-1]}(\alpha, \alpha) = -1.$$

Для доказательства достаточно к левой и правой частям формулы (9) применить операцию $l(\ \ )$.

Отметим, что установленное выше фундаментальное свойство функции $K(x, \alpha)$ позволяет разработать качественно новые методы построения общих решений квазидифференциальных уравнений и исследования соответствующих краевых задач. На основании этого можно развивать, в частности, известные методы изучения статического и динамического поведения сложных упругих систем [2, 3, 5, 9].

1. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.— М.; Л. : Гостехиздат, 1950.— 318 с.
2. *Болотин В. В., Григолюк Э. И.* Устойчивость упругих и неупругих систем.— В кн.: Механика в СССР за 50 лет. М. : Наука, 1972, т. 3, с. 325—363.
3. *Гузь А. Н.* Об исследованиях по механике деформируемого твердого тела в Академии наук УССР.— Прикл. механика, 1978, 14, № 9, с. 3—14.
4. *Зорий Л. М.* К применению обобщенных функций в аналитических методах исследования сложных упругих систем.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 11, с. 991—994.
5. *Зорий Л. М.* К развитию аналитических методов исследования задач динамики упругих и гидроупругих систем.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 7, с. 16—20.
6. *Зорий Л. М.* Об одном фундаментальном свойстве функции влияния.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 9, с. 805—808.
7. *Зорий Л. М.* О новом методе построения общих решений линейных дифференциальных уравнений.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1979, № 5, с. 351—355.
8. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы.— М. : Наука, 1969.— 520 с.
9. *Образцов И. Ф., Онанов Г. Г.* Строительная механика скошенных тонкостенных систем.— М. : Машиностроение, 1973.— 659 с.
10. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений.— М. : Физматгиз, 1959.— 458 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
28.05.80

УДК 513.88

В. Э. Лянце, О. Г. Сторож

О НЕКОТОРЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ИЗМЕНЕНИЕМ ИХ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Все операторы, рассматриваемые в этой статье, предполагаются линейными и действующими в комплексных гильбертовых пространствах. При этом применяются следующие обозначения: $D(T)$, $R(T)$, $Z(T)$ — соответственно область определения, область значений и многообразие нулей оператора T; $(\cdot|\cdot)_T$, $\|\cdot\|_T$ — скалярное произведение и норма графика T, а $\oplus_T$,