Теорема. Пусть выполняются условия 1), 2). Тогда решение задачи (1), (2) допускает асимптотическое разложение (3), когда $k = 2$, где $\bar{u}_i(x, t)$ определяются из формул (4), функции пограничного слоя $\Pi_i(x, \tau)$ являются решениями задач (5); если $k > 2$, решение задачи (1), (2) допускает асимптотическое разложение (6), где $\bar{u}_i(x, t)$ определяются из формул (7), функции пограничного слоя $\Pi_i(x, \tau)$ и $Q_i(x, \eta)$ являются решениями соответственно задач (10) и (11). Остаточный член $R_N(x, t, \varepsilon)$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеет оценку (14).

1. *Бутузов В. Ф.* Угловой погранслой в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений.— Мат. сб., 1977, 104, № 3, с. 460—485.
2. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости.— М. : Мир, 1967.— 310 с.
3. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.— Успехи мат. наук, 1957, 12, № 5, с. 3—122.
4. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике.— М. : Мир, 1972.— 274 с.
5. *Курант Р.* Уравнения с частными производными.— М. : Мир, 1964.— 830 с.
6. *Ладыженская О. А.* Смешанная задача для гиперболического уравнения. — М. : Гостехтеориздат, 1953.— 279 с.
7. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики.— М. : Наука, 1973.— 407 с.
8. *Треногин В. А.* Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника—Вишика.— Успехи мат. наук, 1970, 25, № 4, с. 123—156.
9. *Фридрихс К.* Асимптотические явления в математической физике.— Период. сб. пер. «Математика», 1957, вып. 1, № 2, с. 79—94.
10. *Цимбал В. М.* Виродження гіперболічного рівняння другого порядку у звичайне.— Вісн. Льв. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1977, вып. 12, с. 37—39.
11. *Цимбал В. М.* Задача Коші для гіперболічного рівняння з малим параметром.— В кн.: Питання якісної теорії диференціальних рівнянь та їх застосування. К. : Наук. думка, 1978, с. 63—64.

Львовский университет

Поступила в редколлегию 02.07.80

УДК 518 : 517.91/94

Я. Н. Пелех

ЯВНЫЙ А-УСТОЙЧИВЫЙ МЕТОД ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Многие задачи современной науки и техники приводят к необходимости решать жесткие системы дифференциальных уравнений. Задача Коши

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_0, \quad x \in [a, b] \tag{1}$$

называется жесткой [5] в некотором интервале $I \subset [a, b]$, если для $x \in I$ и

$$\begin{aligned} &1)\ \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s \\ &2)\ S(x) = \max_{i=1,\ldots,s} \operatorname{Re}(-\lambda_i) / \min_{i=1,\ldots} \operatorname{Re}(-\lambda_i) \gg 1, \end{aligned} \tag{2}$$

где λ_i — собственные значения $d\mathbf{f}/d\mathbf{y}$, в которые подставлено решение $\mathbf{y}(x)$ в точке x.

Эффективное управление процессами и системами основано на использовании адекватных математических моделей объектов. Учет большого числа факторов при построении таких моделей неизбежно приводит к жестким дифференциальным системам. К решению таких задач приводят также проблемы построения математических моделей физико-химических, биологических и экономических процессов, задачи многомерной оптимизации, кинетики, электроники, процессов переноса и т. д.

Основной проблемой, которая возникает при попытке получить численное приближение к решению $\mathbf{y}(x)$ жесткой задачи, является проблема численной устойчивости. Чтобы обеспечить абсолютную устойчивость численного решения системы уравнений (1), необходимо использовать такой шаг h, при котором каждое из (комплексных) значений $\bar{h}_i = h\lambda_i$ $(i = 1, 2, \ldots \ldots, s)$, где λ_i — собственные значения $d\mathbf{f}/d\mathbf{y}$, лежало бы внутри области устойчивости. Таким образом, для методов с ограниченной областью устойчивости длина шага лимитируется порядком величины наименьшей временной постоянной системы. В этом случае более целесообразно использовать A-устойчивые методы. (Численный метод называется A-устойчивым [4], если его область абсолютной устойчивости включает всю полуплоскость $\operatorname{Re}(h\lambda) < 0$.)

В настоящей работе предложен явный A-устойчивый метод типа Рунге — Кутта, который согласован с задачей (1) с порядком 4. Если вектор-функция $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ непрерывна по Липшицу, то любой метод Рунге — Кутта, согласованный с задачей (1) с порядком $p > 1$, является сходящимся [1].

Поскольку предлагаемый метод покомпонентно переносится на случай системы обыкновенных дифференциальных уравнений, то для простоты записей будем рассматривать одно дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = y_0 \tag{1'}$$

с достаточно гладкой функцией f.

Решение задачи (1′) ищем в виде цепной дроби [2]

$$y_{n+1} = \frac{\omega_0|}{|1} - \frac{\omega_1 h|}{|1} - \frac{\omega_2 h|}{|1} - \frac{\omega_3 h|}{|1 - \omega_4 h}, \tag{3}$$

где

$$\omega_0 = y_n; \quad \omega_1 = \frac{y_n'}{y_n};$$

$$\omega_2 = \frac{\frac{1}{2} y_n y_n'' - (y_n')^2}{y_n y_n'}; \quad \omega_3 = \frac{y_n\left(\frac{1}{6} y_n' y_n''' - \left(\frac{1}{2} y_n''\right)^2\right)}{y_n'\left(\frac{1}{2} y_n y_n'' - (y_n')^2\right)}; \tag{4}$$

$$\omega_4 = \frac{y_n'\left\{\frac{y_n''}{2}\left(\frac{1}{6} y_n' y_n''' - \left(\frac{y_n''}{2}\right)^2\right) + \frac{y_n'''}{6}\left(\frac{1}{2} y_n' y_n'' - \frac{1}{6} y_n y_n'''\right) + \frac{y_n^{\mathrm{IV}}}{24}\left(\frac{1}{2} y_n y_n'' - (y_n')^2\right)\right\}}{\left\{\frac{1}{2} y_n y_n'' - (y_n')^2\right\}\left\{\frac{1}{6} y_n' y_n''' - \left(\frac{y_n''}{2}\right)^2\right\}}.$$

Положим

$$\frac{y_n''}{2} = \frac{1}{h}(a_1 k_1 + a_2 k_2), \qquad \frac{y_n'''}{6} = \frac{1}{h^2}(b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3),$$

$$\frac{y_n^{\mathrm{IV}}}{24} = \frac{1}{h^3}(c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3 + c_4 k_4). \tag{5}$$

Здесь

$$k_1 = f(x_n, y_n); \quad k_2 = f(x_n + \alpha_2 h, \; y_n + \beta_{21} h k_1);$$

$$k_3 = f(x_n + \alpha_3 h, \; y_n + \beta_{31} h k_1 + \beta_{32} h k_2);$$

$$k_4 = f(x_n + \alpha_4 h, \; y_n + \beta_{41} h k_1 + \beta_{42} h k_2 + \beta_{43} h k_3). \tag{6}$$

Допустим, что численное и точное решения задачи Коши (1′) совпадают в точке x_n. Разложим оба решения в ряд Тейлора по степеням h и приравняем коэффициенты при соответствующих производных в обоих рядах. Метод вода (3) — (6) будет согласован с задачей (1′) с порядком p, если оба ряда Тейлы ра совпадают до p-го члена разложения включительно. При этом на параметры метода накладываются условия согласованности. В результате с учетом обеспечения свойства A-устойчивости получим следующую систему уравнений:

$$a_1 + a_2 = 0, \quad a_2\alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad b_1 + b_2 + b_3 = 0,$$

$$b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3 = 0, \quad (a_2 + b_2 + c_2)\alpha_2^2 + (b_3 + c_3)\alpha_3^2 + c_4\alpha_4^2 = \frac{1}{3},$$

$$c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4 = 0,$$

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0, \quad b_3\beta_{32}\alpha_2 = \frac{1}{6},$$

$$c_3\beta_{32}\alpha_2 + c_4(\beta_{42}\alpha_2 + \beta_{43}\alpha_3) = 0,$$

$$(a_2 + b_2 + c_2)\alpha_2^3 + (b_3 + c_3)\alpha_3^3 + c_4\alpha_4^3 = \frac{1}{4},$$

$$(b_3 + c_3)\alpha_2^2\beta_{32} + c_4(\beta_{42}\alpha_2^2 + \beta_{43}\alpha_3^2) = \frac{1}{12},$$

$$(b_3 + c_3)\alpha_2\beta_{32}\alpha_3 + c_4\alpha_4(\beta_{42}\alpha_2 + \beta_{43}\alpha_3) = \frac{1}{8}, \quad c_4\beta_{43}\beta_{32}\alpha_2 = \frac{1}{24}, \tag{7}$$

причем $\alpha_2 = \beta_{21}$, $\alpha_3 = \beta_{31} + \beta_{32}$, $\alpha_4 = \beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43}$.

Выбрав в качестве свободных параметров α_2 и α_3, положив при этом $\alpha_4 = 1$, получим

$$a_1 = -\frac{1}{2\alpha_2}, \quad a_2 = \frac{1}{2\alpha_2},$$

$$b_1 = \frac{1 - 2\alpha_2}{3\alpha_2\alpha_3}, \quad b_2 = \frac{2\alpha_2 - 1}{3\alpha_2(\alpha_3 - \alpha_2)}, \quad b_3 = \frac{1 - 2\alpha_2}{3\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2)},$$

$$c_1 = \frac{\alpha_3[3(1 + 2\alpha_2\alpha_3) - 4(\alpha_2 + \alpha_3)] - (1 - 2\alpha_2)(3 - 4\alpha_3)}{12\alpha_2\alpha_3(1 - \alpha_3)},$$

$$c_2 = \frac{(1 - \alpha_2)(1 - 2\alpha_2)(3 - 4\alpha_3) - (\alpha_3 - \alpha_2)[3(1 + 2\alpha_2\alpha_3) - 4(\alpha_2 + \alpha_3)]}{12\alpha_2(1 - \alpha_2)(1 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_2)},$$

$$c_3 = \frac{(2\alpha_2 - 1)(3 - 4\alpha_3)}{12\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2)(1 - \alpha_3)}, \quad c_4 = \frac{3(1 + 2\alpha_2\alpha_3) - 4(\alpha_2 + \alpha_3)}{12(1 - \alpha_2)(1 - \alpha_3)},$$

$$\beta_{31} = \frac{2\alpha_2\alpha_3(1 - 2\alpha_2) - \alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2)}{2\alpha_2(1 - 2\alpha_2)}, \quad \beta_{32} = \frac{\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2)}{2\alpha_2(1 - 2\alpha_2)},$$

$$\beta_{42} = \frac{2(1 - \alpha_3)(1 - \alpha_2)(2\alpha_3 - 1) - (1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_2)}{2\alpha_2(\alpha_3 - \alpha_2)[3(1 + 2\alpha_2\alpha_3) - 4(\alpha_2 + \alpha_3)]},$$

$$\beta_{43} = \frac{(1 - \alpha_3)(1 - \alpha_2)(1 - 2\alpha_2)}{\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2)[3(1 + 2\alpha_2\alpha_3) - 4(\alpha_2 + \alpha_3)]},$$

$$\beta_{41} = \alpha_4 - \beta_{42} - \beta_{43}. \tag{8}$$

В случае, если $\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2}$ и $\alpha_4 = 1$, имеем однопараметрическое семейство формул

$$a_1 = -1, \quad a_2 = 1,$$

$$b_1 = 0, \quad b_2 = -\frac{t^2 + 1}{3t}, \quad b_3 = \frac{t^2 + 1}{3t},$$

$$c_1 = \frac{1}{6}, \quad c_2 = \frac{1 - t}{3t}, \quad c_3 = -\frac{1}{3t}, \quad c_4 = \frac{1}{6},$$

$$\beta_{21} = \frac{1}{2}, \quad \beta_{31} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2t}, \quad \beta_{32} = \frac{1}{2t},$$

$$\beta_{41} = 0, \quad \beta_{42} = 1 - t, \quad \beta_{43} = t. \tag{9}$$

Если положить $t = 1$, то

$$a_1 = -1, \quad a_2 = 1, \quad b_1 = 0. \quad b_2 = -\frac{2}{3}. \quad b_3 = \frac{2}{3},$$

$$c_1 = \frac{1}{6}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -\frac{1}{3}, \quad c_4 = \frac{1}{6},$$

$$\beta_{21} = \frac{1}{2}, \quad \beta_{31} = 0, \quad \beta_{32} = \frac{1}{2},$$

$$\beta_{41} = 0, \quad \beta_{42} = 0, \quad \beta_{43} = 1. \tag{10}$$

Ошибка вследствие отбрасывания членов будет равна

$$T = Eh^5 + O(h^6), \tag{11}$$

где

$$E = \left(\sum_{i=1}^{4} d_i\psi_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3} \varphi_i\right)^{-1};$$

$$d_1 = \frac{1}{1440}[p_1 D^4 f + p_2 Df D^2 f_y + p_3 f_y D^3 f + p_4 Df_y D^2 f + p_5 f_y^2 D^2 f + p_6 f_{yy}(Df)^2 + p_7 f_y Df Df_y + p_8 f_y^3 Df];$$

$$d_2 = d_3 = d_4 = 1;$$

$$p_1 = 5\alpha_2 + 5\alpha_3 - 10\alpha_2\alpha_3 - 3; \quad p_2 = 6(5\alpha_3 - 3);$$

$$p_3 = 4(3 + 10\alpha_2\alpha_3) - 5\alpha_2 - 5\alpha_3; \quad p_4 = 6(5\alpha_2 - 2); \quad p_5 = 6(2 - 5\alpha_2);$$

$$p_6 = 3\left\{12 - 5\left[\frac{\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2)}{(1-\alpha_3)(1-2\alpha_2)} + \frac{(1-\alpha_2)(3-4\alpha_3)^2}{(1-\alpha_3)(6\alpha_2\alpha_3 - 4\alpha_2 - 4\alpha_3 + 3)}\right]\right\};$$

$$p_7 = 12(2 - 5\alpha_3), \quad p_8 = 12; \quad \psi_1 = f(D^2 f + f_y Df) - (Df)^2;$$

$$\psi_2 = -f(D^3 f + f_y D^2 f + f_y^2 Df + 3Df + Df_y)^2;$$

$$\psi_3 = 2Df(D^2 f + f_y Df)(D^3 f + f_y D^2 f + f_y^2 Df + 3Df + Df_y);$$

$$\psi_4 = -(D^2 f + f_y Df)^3; \quad \varphi_1 = \psi_1;$$

$$\varphi_2 = -h[f(D^3 f + f_y D^2 f + f_y^2 Df + 3Df + Df_y) - (D^2 f - f_y Df) Df];$$

$$\varphi_3 = h^2[Df(D^3 f + f_y D^2 f + f_y^2 Df + 3Df + Df_y) - (D^2 f - f_y Df)^2];$$

$$Df = f_x + ff_y; \quad D^2 f = f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy};$$

$$D^3 f = f_{xxx} + 3ff_{xxy} + 3f^2 f_{xyy} + f^3 f_{yyy};$$

$$D^4 f = f_{xxxx} + 4ff_{xxxy} + 6f^2 f_{xxyy} + 4f^3 f_{xyyy} + f^4 f_{yyyy}.$$

Параметры α_2 и α_3 необходимо доопределить. Их можно было бы выбрать так, чтобы проще производить вычисления или чтобы ошибки округления и требования к накоплению информации были минимизированы. Однако при современных ЭВМ важно выбрать эти параметры исходя из того, чтобы ошибка вследствие отбрасывания членов высших порядков была минимальной. Практически оптимальными оказались формулы при $\alpha_2 = 0{,}35$ и $\alpha_3 = 0{,}45$, хотя если $0{,}3 < \alpha_2 < \alpha_3 < 0{,}7$, то ошибка вследствие отбрасывания членов высших порядков не больше чем в два раза наименьшего значения.

Оператор перехода метода (3) — (6) имеет вид

$$R(\lambda h) = \frac{1 + \frac{1}{2}\lambda h + \frac{1}{12}(\lambda h)^2}{1 - \frac{1}{2}\lambda h + \frac{1}{12}(\lambda h)^2}. \quad \operatorname{Re}(\lambda) < 0. \tag{12}$$

т. е. метод A-устойчивый [3]. Для эффективного использования метода необходима стратегия изменения шага интегрирования. Возможны варианты такой стратегии, при которой вычисляется y_n^h и y_n^{2h} с шагами h и $2h$, с последующей оценкой в точке x_{n+2}:

$$\delta = \frac{y_n^h - y_n^{2h}}{15}.$$

Если $\delta < \varepsilon h$, где ε — необходимая точность в конце интервала интегрирования, то шаг увеличивается в два раза, а если $\delta > \varepsilon h$, то производим перевычисления с уменьшенным в два раза шагом.

1. *Бабушка И., Витасек Э., Прагер М.* Численные процессы решения дифференциальных уравнений.— М. : Мир, 1969.— 368 с.
2. *Боднарчук П. І., Скоробогатько В. Я.* Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування.— К. : Наук. думка, 1974.— 272 с.
3. *Холл Дж., Уатт Дж.* Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Мир, 1979.— 312 с.
4. *Dahlquist G. A* special stability problem for linear multistep methods.— BIT, 1963, 3, p. 27—43.
5. *Lambert J. D.* Computational methods in ordinary differential equations.— London etc: Wiley and Sons, 1973.— 278 p.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 01.04.80

УДК 517.9 : 539.3

М. Ф. Стасюк

О ФУНДАМЕНТАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ ФУНКЦИИ ВЛИЯНИЯ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В работе установлено, что общее решение квазидифференциального уравнения порядка $2n$ можно построить с помощью соответствующей функции влияния и ее последовательных квазипроизводных по параметру. Для обыкновенных дифференциальных уравнений указанное свойство функции влияния установлено в работе [6]; некоторым его применениям посвящены работы [4, 7].

Рассмотрим самосопряженное дифференциальное выражение

$$l(y) = (-1)^n (p_0 y^{(n)})^{(n)} + (-1)^{n-1} (p_1 y^{(n-1)})^{(n-1)} + \cdots + p_n y, \tag{1}$$

где функции $p_0^{-1}(x), \ldots, p_{n-1}(x), p_n(x)$ интегрируемы на некотором конечном промежутке $[a, b]$. Квазипроизводными функции $y(x)$, соответствующими дифференциальному выражению (1), называются функции $y^{[1]}(x), \ldots$ $\ldots, y^{[2n]}(x)$, которые определяются формулами [1, 8]

$$\begin{gathered} y^{[k]} = \frac{d^k y}{dx^k}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad y^{[n]} = p_0 \frac{d^n y}{dx^n}, \\ y^{[n+k]} = p_k \frac{d^{(n-k)}}{dx^{n-k}} y - \frac{d}{dx} (y^{[n+k-1]}). \end{gathered} \tag{2}$$

С дифференциальным выражением (1) можно связать соответствующее однородное квазидифференциальное уравнение

$$l(y) = 0, \tag{3}$$

причем $l(y)$ имеет смысл для данной функции $y(x)$, если все квазипроизводные ее до $(2n-1)$-го порядка включительно существуют и являются абсолютно непрерывными на промежутке $[a, b]$ функциями.

Для уравнения (3) имеет место теорема существования и единственности задачи Коши [8].

Аналогично, как и для обыкновенного дифференциального уравнения, рассмотрим функцию $K(x, \alpha)$, исходя из фундаментальной системы решений