УДК 517.946

В. Н. Цымбал

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Многие задачи механики, физики и других прикладных дисциплин приводят к необходимости изучения уравнений в частных производных с малым параметром при старших производных [2, 4, 8, 9].

Рассмотрим следующую задачу:

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) + \varepsilon a(x, t)\frac{\partial u}{\partial t} + b(x, t)u = f(x, t); \quad (1)$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad (x, t) \in V_T = \{-\infty < x_i < \infty \ (i = 1, \ldots, n), \ 0 \leqslant t \leqslant T\},$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр; $k \geqslant 2$ — натуральное число.

Предположим, что выполняются условия:

1) $a_{ij}(x, t) = a_{ji}(x, t), \ \nu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j \leqslant \mu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2, \quad \nu > 0,$

$$a(x, t) \geqslant \theta > 0 \ \text{ в } \ V_T, \quad b(x, t) \geqslant \theta > 0 \ \text{ в } \ V_T;$$

2) все входящие в выражения (1), (2) функции имеют достаточное количество непрерывных производных в V_T и эти производные ограничены в V_T.

Отметим, что в предположениях 1), 2) задача Коши для гиперболического уравнения (1) однозначно разрешима [6].

Цель настоящей работы — построение асимптотического разложения по степеням малого параметра ε до некоторого порядка N решения задачи (1), (2) с использованием метода пограничного слоя [3]. В двухмерном случае для более общего уравнения задача Коши рассмотрена в работе [11], а случай отсутствия ε при первой производной исследован в работе [10]. При исследовании задачи (1), (2) следует различать два качественно отличных случая $k = 2$ и $k > 2$. В данной статье получена формальная асимптотика для этих случаев и доказана асимптотическая корректность полученных разложений.

Решение задачи (1), (2) в случае $k = 2$ ищем в виде

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i \bar{u}_i(x, t) + \sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i \Pi_i(x, \tau) + R_N(x, t, \varepsilon), \quad (3)$$

где $\tau = t/\varepsilon$ — регуляризующее преобразование; функции $\bar{u}_i(x, t)$, $\Pi_i(x, \tau)$, $R_N(x, t, \varepsilon)$ определены ниже.

Регулярная часть асимптотики $\bar{u} = \sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\bar{u}_i(x, t)$ определяется стандартным способом:

$$\bar{u}_0(x, t) = \frac{f(x, t)}{b(x, t)}, \quad \bar{u}_1(x, t) = -\frac{a(x, t)}{b(x, t)}\bar{u}_0(x, t),$$

$$\bar{u}_i(x, t) = -\frac{1}{b(x, t)}\left[a(x, t)\bar{u}_{i-1} + \frac{\partial^2\bar{u}_{i-2}}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\frac{\partial^2\bar{u}_{i-2}}{\partial x_i\partial x_j}\right] \quad (i \geqslant 2). \quad (4)$$

Функции $\bar{u}_i(x, t)$ $(i = 0, \ldots, N)$ определяются рекуррентно и не удовлетворяют ни одному из условий (2).

Обыкновенные пограничные функции $\Pi(x, \tau, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \Pi_i(x, \tau)$ служат для того, чтобы вместе с $\bar{u}(x, t, \varepsilon)$ удовлетворить условиям (2). Они определяются с помощью уравнения

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \tau^2} + a(x, 0)\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} + b(x, 0)\Pi = [a(x, 0) - a(x, \varepsilon\tau)]\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} +$$

$$+ [b(x, 0) - b(x, \varepsilon\tau)]\Pi + \varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, \varepsilon\tau)\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_i \partial x_j}$$

и начальных условий

$$\Pi(x, 0, \varepsilon) = \varphi(x) - \bar{u}(x, 0, \varepsilon), \quad \frac{\partial \Pi(x, 0, \varepsilon)}{\partial \tau} = \varepsilon\left[\psi(x) - \frac{\partial \bar{u}(x, 0, \varepsilon)}{\partial t}\right].$$

Отсюда получаем задачи для нахождения $\Pi_i(x, \tau)$ $(i = 0, \ldots, N)$:

$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial \tau^2} + a(x, 0)\frac{\partial \Pi_i}{\partial \tau} + b(x, 0)\Pi_i = \pi_i(x, \tau);$$

$$\Pi_i(x, 0) = \varphi_i(x), \quad \frac{\partial \Pi_i(x, 0)}{\partial \tau} = \psi_i(x), \tag{5}$$

где $\varphi_0(x) = \varphi(x) - \bar{u}_0(x, 0)$; $\varphi_i(x) = -\bar{u}_i(x, 0)$ $(i = 1, \ldots, N)$; $\psi_0(x) \equiv 0$;

$$\psi_1(x) = \psi(x) - \frac{\partial \bar{u}_0(x, 0)}{\partial t}; \quad \psi_i(x) = -\frac{\partial \bar{u}_{i-1}(x, 0)}{\partial t} \quad (i = 2, \ldots, N); \quad \pi_i(x, \tau)$$

легко выписать в явном виде, они зависят от $\Pi_j(x, \tau)$ $(j < i)$ и их производных; $\Pi_i(x, \tau)$ $(i = 0, \ldots, N)$ находятся рекуррентно из формул (5), при этом легко показать методом математической индукции, что П-функции имеют погранслойный характер [3].

Решение задачи (1), (2) в случае $k > 2$ строим в виде

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \bar{u}_i(x, t) + \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \Pi_i(x, \tau) + \varepsilon^{k-2} \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i Q_i(x, \eta) + R_N(x, t, \varepsilon), \tag{6}$$

где $\tau = t/\varepsilon$; $\eta = t/\varepsilon^{k-1}$ — регуляризующие преобразования; входящие в выражение (6) функции определяются ниже.

Регулярная часть асимптотики $\bar{u}(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \bar{u}_i(x, t)$ определяется стандартным методом теории возмущений:

$$\bar{u}_0(x, t) = \frac{f(x, t)}{b(x, t)}, \quad \bar{u}_i(x, t) = -\frac{1}{b(x, t)} \times$$

$$\times \left[a(x, t)\frac{\partial \bar{u}_{i-1}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \bar{u}_{i-k}}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\frac{\partial^2 \bar{u}_{i-k}}{\partial x_i \partial x_j}\right] \quad (i = 1, \ldots, N). \tag{7}$$

Здесь и далее для сокращения записи считаем, что функция с отрицательным индексом тождественно равна нулю. Функции $\bar{u}_i(x, t)$ $(i = 0, \ldots, N)$ определяются рекуррентно из формул (7) и не удовлетворяют ни одному из условий (2).

Обыкновенные пограничные функции $\Pi(x, \tau, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \Pi_i(x, \tau)$ и $Q(x, \eta, \varepsilon) = \varepsilon^{k-2} \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i Q_i(x, \eta)$ служат для того, чтобы в сумме с $\bar{u}(x, t, \varepsilon)$ удовлетворить условиям (2). Аналогичная асимптотика с использованием двух типов пограничных функций в окрестности $t = 0$ строилась в работе

[1]. Функции П определяются с помощью уравнения

$$a(x,\ 0)\frac{\partial\Pi}{\partial\tau}+b(x,\ 0)\Pi=[a(x,\ 0)-a(x,\ \varepsilon\tau)]\frac{\partial\Pi}{\partial\tau}+$$

$$+[b(x,\ 0)-b(x,\ \varepsilon\tau)]\Pi-\varepsilon^{k-2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial\tau^2}+\varepsilon^k\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,\ \varepsilon\tau)\frac{\partial^2\Pi}{\partial x_i\partial x_j},\tag{8}$$

а функции Q — с помощью уравнения

$$\frac{1}{\varepsilon^{k-2}}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial\eta^2}+a(x,\ 0)\frac{\partial Q}{\partial\eta}\right)=\frac{1}{\varepsilon^{k-2}}[a(x,\ 0)-a(x,\ \varepsilon^{k-1}\eta)]\frac{\partial Q}{\partial\eta}+$$

$$+\varepsilon^k\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,\ \varepsilon^{k-1}\eta)\frac{\partial^2 Q}{\partial x_i\partial x_j}-b(x,\ \varepsilon^{k-1}\eta).\tag{9}$$

Начальные условия для П- и Q-функций получаются путем подстановки суммы $\bar{u}+\Pi+Q$ в условия (2).

Итак, для П- и Q-функций получаем следующие задачи:

$$a(x,\ 0)\frac{\partial\Pi_i}{\partial\tau}+b(x,\ 0)\Pi_i=r_i(x,\ \tau);$$

$$\Pi_0(x,\ 0)=\varphi(x)-\bar{u}_0(x,\ 0);\ \ \Pi_i(x,\ 0)=-\bar{u}_i(x,\ 0)-Q_{i-k+2}(x,\ 0)\tag{10}$$

$$(i=1,\ \ldots,\ N),$$

где $r_i(x,\tau)$ легко выписать в явном виде (они зависят от $\Pi_j(x,\tau)$ $(j<i)$ и их производных, $r_0(x,\tau)\equiv 0$);

$$\frac{\partial^2 Q_i}{\partial\eta^2}+a(x,\ 0)\frac{\partial Q_i}{\partial\eta}=\xi_i(x,\ \eta),$$

$$\frac{\partial Q_0(x,\ 0)}{\partial\eta}=-\frac{\partial\Pi_0(x,\ 0)}{\partial\tau},\quad \frac{\partial Q_1(x,\ 0)}{\partial\eta}=-\frac{\partial\Pi_1(x,\ 0)}{\partial\tau}-\frac{\partial\bar{u}_0(x,\ 0)}{\partial t}+\psi(x),\tag{11}$$

$$\frac{\partial Q_i(x,\ 0)}{\partial\eta}=-\frac{\partial\Pi_i(x,\ 0)}{\partial\tau}-\frac{\partial\bar{u}_{i-1}(x,\ 0)}{\partial t}\quad(i=2,\ \ldots,\ N),\ \ Q_i(x,\ \eta)\to 0,\ \ \eta\to\infty,$$

где $\xi_i(x,\eta)$ легко выписать в явном виде (они зависят от $Q_j(x,\eta)$ $(j<i)$ и их производных, $\xi_0(x,\eta)\equiv 0$).

Легко видеть, что все $\Pi_i(x,\tau)$ и $Q_i(x,\eta)$ находятся из задач (10), (11) последовательно в таком порядке: $\Pi_0(x,\tau)$, $Q_0(x,\eta)$, $\Pi_1(x,\tau)$ и т. д. Нетрудно показать, что П- и Q-функции имеют погранслойный характер.

Очевидно, $R_N(x,t,\varepsilon)$ определяется как решение задачи

$$L_\varepsilon R_N=q_k(x,\ t,\ \varepsilon);\tag{12}$$

$$R_N(x,0,\varepsilon)=0,\quad \frac{\partial R_N(x,\ 0,\ \varepsilon)}{\partial t}=-\varepsilon^N\frac{\partial\bar{u}_N(x,\ 0)}{\partial t}\quad \text{при}\quad k=2,$$

$$R_N(x,\ 0,\ \varepsilon)=-\varepsilon^{N+1}\left(\sum_{i=1}^{k-2}\varepsilon^i Q_{N-k+2+i}(x,\ \eta)\right),\tag{13}$$

$$\frac{\partial R_N(x,\ 0,\ \varepsilon)}{\partial t}=-\varepsilon^N\frac{\partial\bar{u}_N(x,\ 0)}{\partial t}\quad \text{при}\quad k>2,$$

где $q_k(x,t,\varepsilon)$ легко может быть выписана в явном виде и, что существенно, $q_k(x,t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{N+1})$ в V_T.

Пусть K_T — любой пространственно-характеристический конус, который определяется как и в работе [7]. Методом интегралов энергии [5] при достаточно малых ε для $R_N(x,t,\varepsilon)$ получена оценка

$$\|R_N(x,\ t,\ \varepsilon)\|_{L_2(K_T)}=O(\varepsilon^{N+1/2}),\tag{14}$$

что и доказывает асимптотическую корректность разложений (3) и (6).

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема. Пусть выполняются условия 1), 2). Тогда решение задачи (1), (2) допускает асимптотическое разложение (3), когда $k = 2$, где $\bar{u}_i(x, t)$ определяются из формул (4), функции пограничного слоя $\Pi_i(x, \tau)$ являются решениями задач (5); если $k > 2$, решение задачи (1), (2) допускает асимптотическое разложение (6), где $\bar{u}_i(x, t)$ определяются из формул (7), функции пограничного слоя $\Pi_i(x, \tau)$ и $Q_i(x, \eta)$ являются решениями соответственно задач (10) и (11). Остаточный член $R_N(x, t, \varepsilon)$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеет оценку (14).

1. *Бутузов В. Ф.* Угловой погранслой в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений.— Мат. сб., 1977, 104, № 3, с. 460—485.
2. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости.— М. : Мир, 1967.— 310 с.
3. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.— Успехи мат. наук, 1957, 12, № 5, с. 3—122.
4. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике.— М. : Мир, 1972.— 274 с.
5. *Курант Р.* Уравнения с частными производными.— М. : Мир, 1964.— 830 с.
6. *Ладыженская О. А.* Смешанная задача для гиперболического уравнения. — М. : Гостехтеориздат, 1953.— 279 с.
7. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики.— М. : Наука, 1973.— 407 с.
8. *Треногин В. А.* Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника—Вишика.— Успехи мат. наук, 1970, 25, № 4, с. 123—156.
9. *Фридрихс К.* Асимптотические явления в математической физике.— Периол. сб. пер. «Математика», 1957, вып. 1, № 2, с. 79—94.
10. *Цимбал В. М.* Виродження гіперболічного рівняння другого порядку у звичайне.— Вісн. Льв. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1977, вип. 12, с. 37—39.
11. *Цимбал В. М.* Задача Коші для гіперболічного рівняння з малим параметром.— В кн.: Питання якісної теорії диференціальних рівнянь та їх застосування. К. : Наук. думка, 1978, с. 63—64.

Львовский университет

Поступила в редколлегию
02.07.80

УДК 518 : 517.91/94

Я. Н. Пелех

ЯВНЫЙ A-УСТОЙЧИВЫЙ МЕТОД ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Многие задачи современной науки и техники приводят к необходимости решать жесткие системы дифференциальных уравнений. Задача Коши

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_0, \quad x \in [a, b] \tag{1}$$

называется жесткой [5] в некотором интервале $I \subset [a, b]$, если для $x \in I$ и

$$\begin{gathered} 1)\ \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s \\ 2)\ S(x) = \max_{i=1,\ldots,s} \operatorname{Re}(-\lambda_i) / \min_{i=1,\ldots} \operatorname{Re}(-\lambda_i) \gg 1, \end{gathered} \tag{2}$$

где λ_i — собственные значения $d\mathbf{f}/d\mathbf{y}$, в которые подставлено решение $\mathbf{y}(x)$ в точке x.

Эффективное управление процессами и системами основано на использовании адекватных математических моделей объектов. Учет большого числа факторов при построении таких моделей неизбежно приводит к жестким дифференциальным системам. К решению таких задач приводят также проблемы построения математических моделей физико-химических, биологических и экономических процессов, задачи многомерной оптимизации, кинетики, электроники, процессов переноса и т. д.

Основной проблемой, которая возникает при попытке получить численное приближение к решению $\mathbf{y}(x)$ жесткой задачи, является проблема численной устойчивости. Чтобы обеспечить абсолютную устойчивость численного