УДК 517.43

Ю. И. Черский

К РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КВАДРАТУРАХ

В данной статье рассмотрено линейное уравнение второго рода

$$(I+K)\,u \equiv u(t) + \int_0^1 k(t,\ s)\,u(s)\,ds = g(t), \qquad 0<t<1, \tag{1}$$

ядро которого удовлетворяет условию

$$\frac{\partial}{\partial t}k(t,\ s) + \frac{\partial}{\partial s}k(t,\ s) = k(t,\ 0)\,k(0,\ s). \tag{2}$$

Показано, что в этом случае имеет место факторизация

$$I+K = X_+X_-, \tag{3}$$

где

$$(X_+\psi)(t) \equiv \psi(t) + \int_0^t m(t-s)\,\psi(s)\,ds, \qquad 0<t<1; \tag{4}$$

$$(X_-u)(t) \equiv u(t) + \int_t^1 n(t-s)\,u(s)\,ds, \qquad 0<t<1, \tag{5}$$

причем

$$m(t) = k(t,\ 0), \quad n(-s) = k(0,\ s). \tag{6}$$

Обращение операторов X_+ и X_- не составляет труда и мы получим единственное решение $u = X_-^{-1}X_+^{-1}g$ уравнения (1).

Обращение оператора X_+. В литературе известно обращение подобного оператора Вольтерра, но, как правило, функции предполагаются определенными на всей полуоси $t>0$. Поскольку у нас функции определены лишь на промежутке $(0,\ 1)$, нельзя ограничиться ссылками на литературу, а следует дать подробную формулировку необходимого результата. Пусть $m(t) \in L(0,\ 1)$. Тогда $X_+\colon L_2(0,\ 1) \to L_2(0,\ 1)$ и существует ограниченный обратный оператор

$$X_+^{-1}g \equiv g(t) - \int_0^t r_+(t-s)\,g(s)\,ds, \qquad 0<t<1,$$

где принадлежащая $L(0,\ 1)$ резольвентная функция $r_+(t)$ определена равенствами

$$\begin{aligned} r_+(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+iC}^{+\infty+iC} \frac{M^+(\zeta)}{1+M^+(\zeta)}\,e^{-it\zeta}d\zeta, \qquad 0<t<1; \\ M^+(z) &= \int_0^\infty m(t)\,e^{izt}dt, \quad \operatorname{Im} z \geqslant C. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь функция $m(t)$ продолжена при $t > 1$; на продолжение наложено лишь то ограничение, что

$$\exists c > 0: \quad \int_1^{\infty} |m(t)| e^{-ct} dt < \infty.$$

Другая постоянная C такова, что $C > c$ и в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant C$ функция $1 + M^+(z)$ не имеет нулей (такая постоянная существует).

Обращение оператора X_-. Пусть $n(t) \in L(-1, 0)$. Тогда $X_-: L_2(0, 1) \to L_2(0, 1)$ и существует ограниченный обратный оператор

$$X_-^{-1} h \equiv h(t) - \int_t^1 r_-(t-s) h(s)\, ds,$$

где

$$\begin{aligned} r_-(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty - iC}^{+\infty - iC} \frac{N^-(\zeta)}{1 + N^-(\zeta)} e^{-it\zeta} d\zeta \qquad (\in L(-1, 0)); \\ N^-(z) &= \int_{-\infty}^{0} n(t) e^{izt} dt, \quad \operatorname{Im} z \leqslant -C. \end{aligned} \tag{8}$$

Функция $n(t)$ доопределена при $t < -1$ так, чтобы при некоторой действительной постоянной c произведение $e^{ct} n(t)$ принадлежало $L(-\infty, -1)$. Положительная постоянная C такова, что $C > c$ и в полуплоскости $\operatorname{Im} z \leqslant -C$ отсутствуют нули функции $1 + N^-(z)$ (такая постоянная существует).

Вычислив произведение операторов (4) и (5) в соответствии с формулой (3), получим следующее представление для ядра:

$$k(t, s) = \begin{cases} m(t-s) + \int_0^s m(t-\tau) n(\tau - s)\, d\tau, & t > s, \\ n(t-s) + \int_0^t m(t-\tau) n(\tau - s)\, d\tau, & t < s. \end{cases} \tag{9}$$

То, что ядро (9) удовлетворяет условию * (2), проверяется непосредственно. Покажем, что и обратно, любое ядро $k_1(t, s)$ из достаточно широкого класса (этот класс описан ниже), удовлетворяющее условию (2), представимо в форме (9), где $m(t) = k_1(t, 0)$, $n(-s) = k_1(0, s)$. Действительно, разность $k^* = k - k_1$ есть решение следующей линейной задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} k^*(t, s) + \frac{\partial}{\partial s} k^*(t, s) &= 0, \qquad 0 < t, \quad s < 1, \\ k^*(t, 0) &= 0, \qquad 0 < t < 1, \\ k^*(0, s) &= 0, \qquad 0 < s < 1. \end{aligned} \tag{10}$$

В качестве класса для ядер $k(t, s)$ выберем такой, в котором задача (10) имеет лишь нулевое решение. При этом производные $\frac{\partial}{\partial t} k^*$ и $\frac{\partial}{\partial s} k^*$ понимаются в том смысле, что и в условии (2). Так же одинаков смысл, в котором понимаются предельные значения $k^*(t, 0)$, $k(t, 0)$, $k^*(0, s)$, $k(0, s)$ (являющиеся по условию суммируемыми функциями).

Из равенства $k^* \equiv 0$ следует, что $k_1 \equiv k$, т. е. следует представимость ядра k_1 в форме (9).

Отметим, что описанная схема включает, в частности, уравнения с кусочно-непрерывными ядрами, удовлетворяющими условию (2), где $k(t, 0)$, $k(0, s)$ — суммируемые функции.

---

* Производные в условии (2) в общем случае следует понимать в смысле обобщенных функций.

Формулировка результата. Пусть ядро $k(t, s)$ имеет суммируемые предельные значения $k(t, 0)$ и $k(0, s)$ и удовлетворяет условию (2). Тогда при любой правой части $g(t) \in L_2(0, 1)$ уравнение (1) имеет в пространстве $L_2(0, 1)$ единственное решение

$$u(t) = g(t) - \int_0^1 r(t, s)\, g(s)\, ds, \qquad 0 < t < 1, \tag{11}$$

$$r(t, s) = \begin{cases} r_+(t-s) - \int_t^1 r_+(\tau - s)\, r_-(t-\tau)\, d\tau, & t > s, \\ r_-(t-s) - \int_s^1 r_+(\tau - s)\, r_-(t-\tau)\, d\tau, & t < s, \end{cases} \tag{12}$$

где функции r_+ и r_- определены формулами (7), (8) и (6).

Пример:

$$u(t) + \lambda \int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{|t-s|}} + \lambda \ln \left| \frac{\sqrt{t} + \sqrt{s}}{\sqrt{t} - \sqrt{s}} \right| \right] u(s)\, ds = g(t), \quad \lambda = \mathrm{const}.$$

Условие (2) выполнено. Так как ядро симметрично, то $r_-(t) = r_+(-t)$ и достаточно найти одну резольвентную функцию r_+. Очевидно,

$$m(t) = k(t, 0) = \frac{\lambda}{\sqrt{t}}, \qquad 0 < t < 1.$$

Продолжая эту функцию на луч $t \geqslant 1$ аналитически, находим

$$M^+(z) = \lambda \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{i+1}{\sqrt{z}^+}, \quad \operatorname{Im} z > 0$$

(значения $\sqrt{z}^+$ лежат в верхней полуплоскости).

Выражение (7) приводит к результату

$$\lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} + \lambda\sqrt{2\pi}}{x + \lambda\sqrt{2\pi x} + \lambda^2 \pi} \cos tx\, dx = \begin{cases} r_+(t), & 0 < t < 1, \\ r_-(t), & -1 < t < 0. \end{cases}$$

Далее вступают в силу формулы (11), (12).

Отметим, что метод остается эффективным для системы уравнений, когда $k(t, s)$ — матрица-функция, а u и g — вектор-функции.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
29.09.80

УДК 517.946

М. С. Волошина, А. С. Гупало, Г. П. Лопушанская

ОБОБЩЕННАЯ ВТОРАЯ СМЕШАННАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СЛУЧАЕ МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

В настоящей статье устанавливается существование и единственность решения обобщенной в смысле работ [1, 6] второй смешанной граничной задачи в многосвязной области для одного класса сильно эллиптических систем второго порядка. В классической постановке задача рассмотрена в работе [2].