$$\times f_1(\tau, \rho, \eta, \alpha)\rho^2 d\rho + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mu_0}^{1} d\eta \int\limits_0^{2\pi} [W_r^-(t-\tau, r, \mu, \eta, \varphi, \alpha)\psi_1(\tau, \eta, \alpha) +$$

$$+ W_r^+(t-\tau, r, \mu, \eta, \varphi, \alpha)\psi_2(\tau, \eta, \alpha)]\, d\alpha +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^{2\pi} d\alpha \int\limits_{R_1}^{R_2} W_\theta(t-\tau, r, \rho, \mu, \varphi, \alpha) f_6(\tau, \rho, \alpha)\rho^2 d\rho +$$

$$+ \int\limits_{\mu_0}^{1} d\eta \int\limits_0^{2\pi} d\alpha \int\limits_{R_1}^{R_2} K(t, \tau, \rho, \mu, \eta, \varphi, \alpha)\, [f_3(\rho, \eta, \alpha) + \frac{b_1^2}{b_0^2} f_2(\rho, \eta, \alpha)\rho^2 d\rho +$$

$$+ \frac{d}{dt} \int\limits_{\mu_0}^{1} d\eta \int\limits_0^{2\pi} d\alpha \int\limits_{R_1}^{R_2} K(t, r, \rho, \mu, \eta, \varphi, \alpha) f_2(\rho, \eta, \alpha)]\, \rho^2 d\rho. \qquad (16)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перепишем формулу (16) в виде суммы сверток:

$$T = E \underset{t}{*} \underset{\mu}{*} \underset{\varphi}{*} \underset{r}{*} f_1 + W_r^- \underset{t}{*} \underset{\mu}{*} \underset{\varphi}{*} \psi_1 + W_r^+ \underset{t}{*} \underset{\mu}{*} \underset{\varphi}{*} \psi_2 +$$

$$+ W_\theta \underset{t}{*} \underset{\varphi}{*} \underset{r}{*} f_6 + K \underset{\mu}{*} \underset{\varphi}{*} \underset{r}{*} \left[f_3 + \frac{b_1^2}{b_0^2} f_2 \right] + \frac{\partial K}{\partial t} \underset{\mu}{*} \underset{\varphi}{*} \underset{r}{*} f_2.$$

Справедливость теоремы вытекает из свойств фундаментальных функций задачи (1) — (4), описанных в леммах 1—4, теорем о непрерывности и непрерывной дифференцируемости сверток [7] и равенства

$$\left(\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} \underset{\mu}{*} \underset{\varphi}{*} \underset{r}{*} f \right) \Bigg|_{t=0} = -b_1^2 b_0^{-2} f.$$

Если в выражении (16) устремить c_q к бесконечности ($b_0 \to 0$, $\tau_r \to 0$), то получим структуру классического температурного поля в шаровом секторе D. Параметры h и β дают возможность из формулы (16) получить решение задачи при задании на одной из двух границ $r = R_j$ или на обеих одновременно любого из граничных условий I, II и III рода.

1. *Карслоу Х. С., Егер Д. К.* Теплопроводность твердых тел.— М. : Наука, 1964.— 487 с.
2. *Кошляков И. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики.— М. : Высш. школа, 1970.— 710 с.
3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного.— М. : Наука, 1973.— 736 с.
4. *Ленюк М. П.* О волновом уравнении теплопроводности.— Укр. мат. журн., 1972, 24, № 6, с. 832—838.
5. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности.— М. : Высш. школа, 1967.— 600 с.
6. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика.— Киев : Наук. думка, 1976.— 310 с.
7. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс.— М. : Наука, 1965.— 328 с.

Черновицкий университет

Поступила в редколегггию
03.07.79

УДК 536.21

В. Н. Михайлов

ТЕПЛОПЕРЕДАЧА В ТОНКИХ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИНКАХ СО СЛОЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Рассмотрим задачу определения температурного поля в тонкой анизотропной пластинке толщиной h. Совместим плоскость xOy прямоугольной системы координат xyz со срединной плоскостью пластинки. Считаем, что ось z совпадает с одной из главных осей теплопроводности, а оси x, y — с двумя другими главными осями. На поверхностях пластинки происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона с коэффициентом теплообмена α_1 и температурой окружающей среды T_1. Тогда задача теплопроводности сводится к решению уравнения

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{2\alpha_1}{h}(T - T_1) = -q_V(x, y) \qquad (1)$$

в области D. Здесь q_V — удельное тепловыделение в пластинке; λ_x, λ_y — коэффициенты теплопроводности по осям x, y. Исследуем случай, когда на границах области D осуществляется теплообмен по закону Ньютона (или тепловой поток), условие которого с учетом анизотропии имеет вид

$$\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \alpha T = f, \quad f = \alpha T_c, \qquad (2)$$

где $\partial/\partial n$ — производная по внешней нормали к границе области D; α — коэффициент теплоотдачи; T_c — температура среды; α и T_c могут изменяться вдоль границы.

Пусть граница Γ в общем случае многосвязной области такова, что ее можно разбить на участки $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_N$, каждый из которых представим уравнением в параметрическом виде

$$x = \varphi_k(\sigma), \quad y = \psi_k(\sigma), \quad \sigma \in \Gamma_k.$$

Параметр σ выберем так, чтобы при движении по участку Γ_k в положительном направлении (область D остается слева) величина σ монотонно увеличивалась от значения d_{k-1} до значения d_k и последнее значение параметра на участке Γ_k было началом отсчета на следующем участке Γ_{k+1}. В этом случае граница Γ взаимно однозначно отобразится на отрезок $[d_0, d_N]$ числовой оси σ, а контуру Γ_k будет соответствовать отрезок $[d_{k-1}, d_k]$ этой оси. Уравнение границы Γ запишем в виде

$$x = \varphi(\sigma), \; y = \psi(\sigma), \; \varphi(\sigma) = \varphi_k(\sigma), \; \psi(\sigma) = \psi_k(\sigma), \quad d_{k-1} \leqslant \sigma \leqslant d_k. \qquad (3)$$

Перейдем от координат x, y к новым координатам ξ, η [1]:

$$\xi = \frac{1}{D_*}\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_x}}\, x, \quad \eta = \frac{1}{D_*}\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_y}}\, y, \qquad (4)$$

где λ, D_* — некоторые характерные значения коэффициента теплопроводности и размера области D. В новых переменных уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} - k^2 T = -Q(\xi, \eta). \qquad (5)$$

Здесь $k^2 = \dfrac{2\alpha_1 D_*^2}{\lambda h}$, $Q = \dfrac{2\alpha_1 T_1 D_*^2}{\lambda h} + \dfrac{q_V D_*^2}{\lambda}$.

Область D превращается в некоторую область D' с границей Γ'; уравнения Γ' получаем подстановкой в формулы (4) выражений для x, y по формулам (3). Граничное условие (2) преобразуется к форме

$$\frac{\partial T}{\partial \nu} + \Lambda T = f, \quad \Lambda = \alpha D_* \sqrt{\frac{\varphi'^2 + \psi'^2}{\lambda\lambda_y \varphi'^2 + \lambda\lambda_x \psi'^2}}, \qquad (6)$$

где $\partial/\partial\nu$ — производная по внешней нормали к границе Γ'. Ее можно вычислить по формуле

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{D_*}{\chi_1}\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_y}}\,\psi'(\sigma)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{D_*}{\chi_1}\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_x}}\,\varphi'(\sigma)\frac{\partial}{\partial y},$$
$$\chi_1 = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_x}\varphi'^2(\sigma) + \frac{\lambda}{\lambda_y}\psi'^2(\sigma)}. \qquad (7)$$

Полученную краевую задачу (5), (6) решаем методом граничных интегральных уравнений [3].

Пусть известно частное решение $W(\xi, \eta)$ уравнения (5), тогда функцию $T(\xi, \eta) - W(\xi, \eta)$ можно представить по формуле Грина [5]

$$T(\xi_0, \eta_0) - W(\xi_0, \eta_0) = \frac{1}{p} \int\limits_{\Gamma'} \left[\frac{\partial (T - W)}{\partial \nu} \delta - (T - W) \frac{\partial \delta}{\partial \nu} \right] ds,$$
$$\delta = K_0(kr), \quad r^2 = (\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2, \tag{8}$$

где ds — элемент длины дуги вдоль границы Γ'; $K_0(kr)$ — функция Макдональда нулевого порядка. Величина $p = 2\pi$, если точка (ξ_0, η_0) находится внутри области D', и $p = \pi$, если эта точка лежит на гладком участке грани-

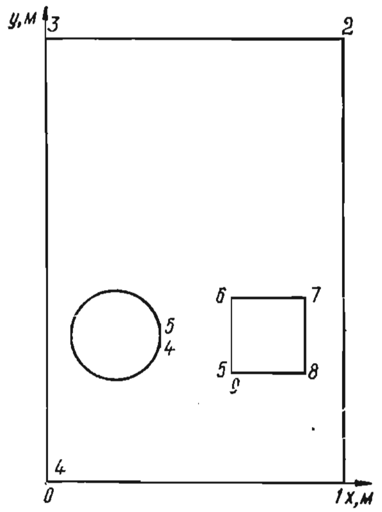

Рис. 1

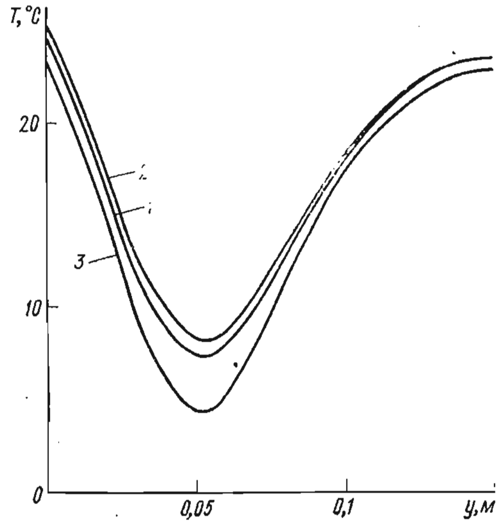

Рис. 2

цы Γ'. В угловой точке величина p равна углу между левосторонней и правосторонней касательными к границе Γ' в этой точке.

Используем в формуле (8) граничное условие (6) и перейдем к параметру σ : $ds = \chi d\sigma$. В результате получим

$$T(\xi_0, \eta_0) = W(\xi_0, \eta_0) - \frac{1}{p} \int\limits_{d_0}^{d_N} \left(\Lambda\delta + \frac{\partial \delta}{\partial \nu} \right) \chi T d\sigma +$$
$$+ \frac{1}{p} \int\limits_{d_0}^{d_N} \left[\left(f - \frac{\partial W}{\partial \nu} \right) \delta + W \frac{\partial \delta}{\partial \nu} \right] \chi d\sigma. \tag{9}$$

Производную $\partial\delta/\partial\nu$ можно вычислить по формуле

$$\frac{\partial \delta}{\partial \nu} = -kK_1(kr) \frac{\partial r}{\partial \nu},$$

где $K_1(kr)$ — функция Макдональда первого порядка.

Формула (9) дает представление температуры внутри области через ее значения на границе. Возьмем в этой формуле точку (ξ_0, η_0) на границе Γ' области. Тогда соотношение (9) превратится в линейное интегральное уравнение второго рода относительно температуры на границе области:

$$T(\sigma_0) + \int\limits_{d_0}^{d_N} K(\sigma_0, \sigma) T(\sigma) d\sigma = b(\sigma_0). \tag{10}$$

Выражение для $K(\sigma_0, \sigma)$ и $b(\sigma_0)$ легко получить из формулы (9).

Уравнение (10) ценно тем, что его составление для конкретной сложной области производится автоматически, как только становятся известными уравнения (3) границы исходной области D. Переход к новым переменным может усложнить первоначальную область, но в данном методе это не играет никакой роли. Поэтому стало возможным написание стандартной программы решения рассматриваемой задачи на ЭВМ в произвольной области. При использовании ее в конкретном случае требуется написать только процедуру вычисления функций $\varphi(\sigma)$, $\psi(\sigma)$, $\varphi'(\sigma)$, $\psi'(\sigma)$, $\alpha(\sigma)$, $f(\sigma)$ в зависимости от σ. Программа составлена в кодах ЭВМ типа «М-200» на языке ФОРТРАН-IV. Интегральное уравнение (10) решается путем замены его системой линейных алгебраических уравнений способом, указанным в работе [1]. Правильность и точность предлагаемого метода проверены на контрольных задачах с известными решениями.

В качестве примера проведен расчет температуры пластинки, форма которой изображена на рис. 1. Граничные условия были взяты следующими. На участке 0—1: $\alpha = 0, f = q_s = 0{,}1 \cdot 10^6$ ккал/м^2 · ч, на остальной части внешней границы $\alpha = 0$, $f = 0$, т. е. стенки теплоизолированы. На внутренних границах задано условие (2) при $\alpha = 0{,}5 \cdot 10^5$ ккал/м^2 · ч · град, $f = \alpha T_c$, $T_c = 0°$ С. Геометрические размеры области: длина участка 0—1 равна 0,1 м, участка 1—2 равна 0,15 м. Радиус окружности 0,0141 м, центр ее находится в точке (0,025; 0,05), длина стороны квадрата равна 0,0125 м, центр — в точке (0,075; 0,05). Площадь квадрата равна площади круга. Расчеты проводили при $\lambda_x = 100$ ккал/м · ч · град, $\lambda_y = \lambda = 250$ ккал/м × × ч · град, $T_1 = 50°$ С, $\alpha_1 = 100$ ккал/м^2 · ч · град, $h = 0{,}005$ м. На рис. 2 приведено распределение температуры вдоль двух внешних сторон при $\varkappa = 0$ (кривая *1*), $\varkappa = 0{,}1$ (кривая *2*). Несовпадение этих двух кривых показывает влияние на теплообмен внутренних отверстий в виде квадрата и круга. При одинаковой их площади это отличие невелико. Там же (кривая *3*) приведено распределение температуры для изотропной пластинки при $\lambda_x = \lambda_y = 250$ ккал/м · ч · град.

1. *Бобрик А. И., Михайлов В. Н.* Об одном методе численного решения линейного интегрального уравнения.— Вест. Яросл. ун-та, 1974, вып. 10, с. 65—69.
2. *Бобрик А. И., Михайлов В. Н.* Расчет нелинейных температурных полей в сложных двумерных областях.— Прикл. механика, 1976, № 4, с. 69—74.
3. *Метод граничных* интегральных уравнений : Сб. статей.— М. : Мир, 1978.— 210 с.
4. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках.— Киев : Наук. думка, 1972.— 308 с.
5. *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики.— М. : Высш. школа, 1962.— 560 с.

г. Подольск

Поступила в редколлегию 20.10.79

УДК 539.32+552.1 : 53

А. С. Федоришин

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ЭФФЕКТИВНЫХ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДВУХФАЗНЫХ СРЕД ОТ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ФАЗ

Одним из основных вопросов механики неоднородных сред является вычисление макроскопических упругих модулей в зависимости от объемного содержания фаз. Они должны находиться между верхней и нижней границами Хашина — Штрикмана и зависеть от геометрической структуры фаз. Эффективные модули упругости двухфазных сред с включениями в виде эллипсоидов вращения получены в работах [2, 3]. В этих статьях пренебрегали флуктуациями деформаций внутри фаз. В настоящей работе показано, что если не пренебрегать флуктуациями деформаций в пределах фаз, то даже при фиксированном значении соотношения полуосей эллипсоида вращения эффективные модули упругости характеризуются не конкретными значениями, а изменяются в некоторых пределах. Точное значение макроскопических модулей зависит от взаимного расположения включений.