следующего условия:

$$\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = a_0. \qquad (14)$$

Были проведены такие же, как и в задаче 1, расчеты. Получено значение $\frac{a_0}{\lambda_2} = -0{,}157379$ (точное значение $-0{,}156$). Для Ω_1 получена относительная погрешность 0,32%, для Ω_2 — 0,28% (см. табл. 1, строка 2; табл. 2, строки 0; 2).

Задача 3. Эта задача аналогична задаче 2, только Γ_0— линия неидеального контакта ($R = 10$). В области Ω_1 точное решение имеет вид

$$u_{1т} = 609{,}862384 - 0{,}05928x + 0{,}0001\,(y^2 - x^2),$$

в области Ω_2 оно осталось прежним. Краевые условия выписываем, как и в задаче 2 (изменяются для Ω_1). На линии Γ_0 выполняется условие (14), а коэффициент a_0 ищем методом наименьших квадратов из условия

$$\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{\Gamma_0} = \frac{1}{R}(u_2 - u_1)\,|_{\Gamma_0}.$$

Получено значение отношения $\frac{a_0}{\lambda_2} = -0{,}156037$ (точное значение $-0{,}156$). Относительная погрешность для Ω_1 составила 0,4%, для Ω_2 — 0,28% (см. табл. 1, строка 3; табл. 2, строки 0; 3).

Все задачи просчитаны с помощью структуры (13). Для Ω_1 было взято 16 координатных функций, для Ω_2 — 49. При решении задачи 1 в постановке для всей области Ω была получена существенно худшая погрешность — около 2%. Из задач 2 и 3 видно, что в случае композитных сред, когда отношение $\lambda_2 : \lambda_1 \gg 1$, предложенный метод решения дает возможность получить более точный результат (см., например, работу [10]).

1. *Рвачев В. Л.* Методы алгебры логики в математической физике.— Киев : Наук. думка, 1974.— 259 с.
2. *Рвачев В. Л.* О понятии структуры решения краевой задачи.— Вест. Харьк. политехн. ин-та, 1973, 72, № 1, с. 3—9.
3. *Рвачев В. Л.* Метод R-функций в краевых задачах.— Прикл. механика, **11**, № 4, 1965, с. 3—14.
4. *Рвачев В. Л., Слесаренко А. П.* Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах.— Киев : Наук. думка, 1976.— 287 с.
5. *Рвачев В. Л., Слесаренко А. П.* Алгебро-логические и проекционные методы в задачах теплообмена.— Киев : Наук. думка, 1978.— 138 с.
6. *Рвачев В. Л., Бобылева О. Н.* Формула Тейлора разностного типа.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 1, с. 26—30.
7. *Рвачев В. Л., Бобылева О. Н.* Структуры разностного типа.— Киев, 1978.— 27 с.— (Препринт / Ин-та пробл. машиностроения АН·УССР, № 109).
8. *Рвачев В. Л., Бобылева О. Н.* О построении обобщенной формулы Тейлора разностного типа.— Укр. мат. журн., 1978, **30**, № 6, с. 768—778.
9. *Франс Д. М.* Аналитическое решение задач о стационарной теплопроводности для тел неправильной формы.— Теплопередача. Сер. С., 1971, **93**, № 4, с. 127—131.
10. *Трицек, Уитвер.* Конечноразностные методы для неоднородных областей.— Теплопередача. Сер. С., 1972, **94**, № 3, с. 70—72.

Институт проблем машиностроения АН УССР

Ворошиловградский машиностроительный институт

Поступила в редколлегию 12.06.79

УДК 536.21

М. П. Ленюк, З. Л. Середюк

ОБОБЩЕННЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ В ПОЛОМ ШАРОВОМ СЕКТОРЕ

В качестве объекта рассмотрим полый однородный изотропный шаровой сектор $D = \{(r, \theta, \varphi),\ R_1 \leqslant r \leqslant R_2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$, в котором равномерно распределены тепловые источники. В предположении, что время релаксации теплового потока τ_r не зависит от направления, определение температуры в данном теле в рамках обобщенной термомеханики сводится к решению уравнения [2, 5, 6]

$$L[T] \equiv b_0^2 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + b_1^2 \frac{\partial T}{\partial t} - \{\Delta_r T + \frac{1}{r^2} \Delta_{\mu,\varphi} T\} = f_1(t, r, \mu, \varphi),$$

$$\left\{\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r},\ \Delta_{\mu,\varphi} = \frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}\right] + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},\ \cos\theta = \mu\right\} \tag{1}$$

при начально-краевых условиях

$$T|_{t=0} = f_2(r, \mu, \varphi),\ \left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{t=0} = f_3(r, \mu, \varphi), \tag{2}$$

$$B_j T \equiv \left(h_{j1}\frac{\partial}{\partial r} + h_{j2}\frac{\partial}{\partial t} + h_{j3}\right) T|_{r=R_j} = (-1)^{j+1}\psi_j(t, \mu, \varphi),\ j = 1, 2, \tag{3}$$

$$T|_{\mu=\mu_0} = f_6(t, r, \varphi),\ \mu_0 \leqslant \mu \leqslant 1,\ \mu_0 = \cos\theta_0 \tag{4}$$

и условиях однозначности по φ. Здесь $h_{11} = h_{21} = \lambda_T$ — коэффициент теплопроводности; $h_{12} = \alpha_1\beta_1\beta_2\tau_r$, $h_{13} = \alpha_1\beta_1$, $h_{23} = -\alpha_2\beta_3$, $h_{22} = -\alpha_2\beta_3\beta_4\tau_r$; α_j — коэффициент теплоотдачи с поверхности $r = R_j$ $(j = 1, 2)$; β_j $(j = \overline{1, 4})$ — коэффициенты связности краевых условий [1]; функции ψ_k имеют вид

$$\psi_1 = \alpha_1\left(1 + \beta_2\tau_r\frac{\partial}{\partial t}\right) f_4(t, \mu, \varphi),\ \psi_2 = \alpha_2\left(1 + \beta_4\tau_r\frac{\partial}{\partial t}\right) f_5(t, \mu, \varphi).$$

При этом $b_0^2 = c_q^{-2}$; c_q — скорость распространения тепла; $b_1^2 = a^{-1}$; a — коэффициент температуропроводности.

Предполагая функции $f_j = (j = \overline{1, 6})$ достаточно гладкими (и, если это необходимо, финитными), решение задачи (1) — (4) строим с помощью главных решений (фундаментальных функций) задачи: функции Коши $K(t, r, \rho, \mu, \eta, \varphi, \alpha)$, фундаментальной функции $E(t, \tau, r, \rho, \mu, \eta, \varphi, \alpha)$, левой $W_r^-(t, \tau, r, \mu, \eta, \varphi, \alpha)$ и правой $W_r^+(t, \tau, r, \mu, \eta, \varphi, \alpha)$ радиальных функций Грина, трансверсальной функции Грина $W_\theta(t, \tau, r, \rho, \mu, \varphi, \alpha)$.

Определение 1. Функцией Коши задачи (1) — (4) назовем обобщенную функцию $K(t, r, \rho, \mu, \eta, \varphi, \alpha)$, удовлетворяющую в смысле теории распределений уравнению $L[K] = 0$, нулевым краевым условиям, условиям однозначности по φ и начальным условиям

$$K|_{t=0} = 0,\ \left.\frac{\partial K}{\partial t}\right|_{t=0} = \rho^{-2}\delta(r-\rho) \otimes \delta(\mu-\eta) \otimes \delta(\varphi-\alpha).$$

Определение 2. Левой радиальной (правой радиальной, трансверсальной) функцией Грина задачи (1) — (4) назовем обобщенную функцию $W_r^-(t, \tau, r, \mu, \eta, \varphi, \alpha)$ ($W_r^+(t, \tau, r, \mu, \eta, \varphi, \alpha)$, $W_\theta(t, \tau, r, \rho, \mu, \varphi, \alpha)$), удовлетворяющую в смысле теории распределения уравнению $L[W_r^-] = 0$ ($L[W_r^+] = 0$, $L[W_\theta] = 0$), нулевым начальным условиям, условиям однозначности по φ и краевым условиям

$$W_r^-|_{\mu=\mu_0} = 0,\ B_1 W_r^- = \delta(t-\tau) \otimes \delta(\mu-\eta) \otimes \delta(\varphi-\alpha),\ B_2 W_r^- = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} W_r^+|_{\mu=\mu_0} = 0,\ B_1 W_r^+ = 0,\ B_2 W_r^+ = -\delta(t-\tau) \otimes \delta(\mu-\eta) \otimes \delta(\varphi-\alpha), \\ B_1 W_\theta = 0,\ B_2 W_\theta = 0,\ W_\theta|_{\mu=\mu_0} = \rho^{-2}\delta(r-\rho) \otimes \delta(t-\tau) \otimes \delta(\varphi-\alpha) \end{array}\right).$$

Определение 3. Фундаментальной функцией задачи (1) — (4) назовем обобщенную функцию $E(t, \tau, r, \rho, \mu, \eta, \varphi, \alpha)$, удовлетворяющую в смысле теории распределений нулевым начальным и краевым условиям, условиям однозначности по φ и уравнению

$$L[E] = \rho^{-2}\delta(r-\rho) \otimes \delta(t-\tau) \otimes \delta(\mu-\eta) \otimes \delta(\varphi-\alpha).$$

Здесь крестиком в кружочке обозначено тензорное произведение функционалов (распределений); $\delta(x-a)$ — дельта-функция Дирака, сосредоточенная в точке $x=a$.

Так как фундаментальная функция задачи (1) — (4) [4]

$$E = b_0^{-2} K(t-\tau, r, \rho, \mu, \eta, \varphi, \alpha) S_+(t-\tau),$$

где $S_+(x)$ — асимметричная единичная функция, то достаточно построить функции K, W_r^+ и W_θ.

Найдем структуру температурного поля. Для этого определим конечные прямое Λ_{mn} и обратное Λ_{mn}^{-1} обобщенные интегральные преобразования Лежандра — Фурье по правилам

$$\Lambda_{mn}[f(\varphi,\mu)] = \int_{\mu_0}^{1}\int_{0}^{2\pi} f(\varphi,\mu)\, e^{im\varphi} P_{\nu_n}^{-m}(\mu)\, d\varphi d\mu \equiv f_{mn},$$

$$\Lambda_{mn}^{-1}[f_{mn}] = \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} E_m e^{-im\varphi}\frac{P_{\nu_n}^{-m}(\mu)}{\|P_{\nu_n}^{-m}(\mu)\|^2} f_{mn} \equiv f(\varphi,\mu),$$

где $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}$ — монотонно возрастающая последовательность положительных корней обобщенного трансцендентного уравнения Лежандра I рода $P_\nu^{-m}(\mu_0)=0$; $P_\nu^{-m}(\mu)$ — присоединенная функция Лежандра II рода;

$$E_m = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } m=0,\\ 1, & \text{если } m\geqslant 1;\end{cases} \quad \|P_\nu^{-m}(\mu)\|^2 = -\frac{(1-\mu_0^2)}{2\nu+1}\times$$

$$\times\frac{\partial P_\nu^{-m}(\mu_0)}{\partial\nu}\frac{\partial P_\nu^{-m}(\mu_0)}{\partial\mu}$$

— квадрат нормы; $\nu+\frac{1}{2}>0$. Докажем вспомогательные утверждения, описывающие структуру главных решений задачи (1) — (4). Предварительно введем в рассмотрение функции

$$U_{\alpha,\nu}(x,y) = I_{\alpha,\nu}(x)K_{\alpha,\nu}(y) - I_{\alpha,\nu}(y)K_{\alpha,\nu}(x),$$

$$V_{\alpha,\nu}(x,y) = I_{\alpha,\nu}(x)K_{\alpha+1,\nu+1}(y) + I_{\alpha+1,\nu+1}(y)K_{\alpha,\nu}(x),$$

$$u_{\alpha,\nu}(x,y) = J_{\alpha,\nu}(x)N_{\alpha,\nu}(y) - J_{\alpha,\nu}(y)N_{\alpha,\nu}(x),$$

$$v_{\alpha,\nu}(x,y) = J_{\alpha,\nu}(x)N_{\alpha+1,\nu+1}(y) - J_{\alpha+1,\nu+1}(y)N_{\alpha,\nu}(x),$$

$$A_{\alpha,\nu}^{(j)}(r,\rho,\beta) = A_{\alpha,\nu}^{(1)}(\beta r,\beta R_1)A_{\alpha,\nu}^{(2)}(\beta\rho,\beta R_2) + \bar h_{12}\bar h_{22}q^2(\beta)u_{\alpha,\nu}(\beta r,\beta R_1)\times$$
$$\times u_{\alpha,\nu}(\beta\rho,\beta R_2),$$

$$B_{\alpha,\nu}(r,\rho,\beta) = \bar h_{22}A_{\alpha,\nu}^{(1)}(\beta r,\beta R_1)u_{\alpha,\nu}(\beta\rho,\beta R_2) + \bar h_{12}\times$$
$$\times A_{\alpha,\nu}^{(2)}(\beta\rho,\beta R_2)u_{\alpha,\nu}(\beta r,\beta R_1),\quad k = b_1^2(2b_0^2)^{-1},$$

$$\bar h_{j2} = h_{j2}(2b_0^2)^{-1},\quad k_j = h_{j1}\frac{\alpha-\nu}{R_j} + h_{j3} - h_{j2}k,\quad j=1,2,$$

$$G_{\alpha,\nu}(\beta) = f_{11}(\beta)u_{\alpha,\nu}(\beta R_1,\beta R_2) + \frac{1}{2}a^{-2}q^2(\beta)\beta^2R_1R_2\times$$

$$\times f_{22}(\beta)u_{\alpha+1,\nu+1}(\beta R_1,\beta R_2) - \frac{1}{2}a^{-2}R_2 f_{31}(\beta)v_{\alpha,\nu}(\beta R_1,\beta R_2) +$$

$$+\frac{1}{2}a^{-2}R_1 f_{41}(\beta)v_{\alpha,\nu}(\beta R_2,\beta R_1),$$

$$\Theta_{\alpha,\nu}(\beta) = -f_{12}(\beta)u_{\alpha,\nu}(\beta R_1,\beta R_2) + \frac{1}{2}a^{-2}\beta^2R_1R_2 f_{21}(\beta)\times$$

$$\times u_{\alpha+1,\nu+1}(\beta R_1, \beta R_2) - \frac{1}{2} a^{-2} R_2 f_{32}(\beta)\, v_{\alpha,\nu}(\beta R_1, \beta R_2) +$$

$$+ \frac{1}{2} a^{-2} R_1 f_{42}(\beta)\, v_{\alpha,\nu}(\beta R_2, \beta R_1),$$

$$f_{11} = k_2 h_{12} + k_1 h_{22} + \frac{h_{11} h_{22} R_1 + h_{12} h_{21} R_2}{4 b_0^2 a^2} q^2(\beta) +$$

$$+ \frac{\nu - \alpha}{\beta^2} \frac{k_2 h_{12} + k_1 h_{22}}{2 a^2 b_0^2} q^2(\beta),$$

$$f_{12} = \frac{k_2 h_{11} R_1 + k_1 h_{21} R_2}{2a^2} + 2\bar{h}_{12} h_{22} + \frac{\nu - \alpha}{a^2 \beta^2} (k_1 k_2 + \bar{h}_{12} \bar{h}_{22} q^2(\beta)),$$

$$f_{21} = 4 h_{11} h_{21} + k_1 R_1 h_{21} + k_2 R_2 h_{11}, \quad f_{22} = \bar{h}_{12} h_{21} R_1 + \bar{h}_{22} h_{11} R_2,$$

$$f_{31} = [(k_1 \bar{h}_{22} + k_2 \bar{h}_{12}) R_2 - 2\nu h_{21} \bar{h}_{12}] q^2(\beta) - 2a^2 \beta^2 h_{12} h_{21},$$

$$f_{32} = k_1 k_2 R_2 + \bar{h}_{12} \bar{h}_{22} R_2 q^2(\beta) - 2\nu k_1 h_{21} - h_{11} h_{21} R_1 \beta^2,$$

$$f_{41} = [(k_1 \bar{h}_{22} + k_2 \bar{h}_{12}) R_1 - 2\nu h_{11} \bar{h}_{22}] q^2(\beta) - 2a^2 \beta^2 h_{11} h_{22},$$

$$f_{42} = k_1 k_2 R_1 + \bar{h}_{12} \bar{h}_{22} R_1 q^2(\beta) - 2\nu k_2 h_{11} - h_{11} h_{21} R_2 \beta^2,$$

$$q(\beta) = \sqrt{b_1^4 - 4 b_0^2 a^2 \beta^2},$$

$$K_{\alpha,\nu}(x) = x^{-\nu} K_\alpha(x), \quad J_{\alpha,\nu}(x) = x^{-\nu} J_\alpha(x),$$

$$N_{\alpha,\nu}(x) = x^{-\nu} N_\alpha(x).$$

Здесь $I_\alpha(x)$, $K_\alpha(x)$, $J_\alpha(x)$, $N_\alpha(x)$ — модифицированные и обычные функции Бесселя I и II рода.

Лемма 1. Пусть $\bar{q}(\beta) = q(\beta)(2b_0^2)^{-1}$, $P_\pm(\beta) = -k \pm \bar{q}(\beta)$, $h_{sn}^{\pm}(\beta) = h_{s1} \frac{\nu_n}{R_s} + h_{s3} + h_{s2} P_\pm(\beta)$ $(s = 1, 2)$, $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}$ — монотонно возрастающая последовательность положительных корней трансцендентного уравнения Лежандра I рода

$$P_\nu^{-m}(\mu_0) = 0, \quad \nu + \frac{1}{2} > 0, \tag{5}$$

а $\{\beta_{jn}\}_{j=1}^{\infty}$ — различные корни обобщенного трансцендентного уравнения Бесселя II рода

$$\Delta_{\nu_n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\beta) \equiv h_{1n}^{\pm}(\beta)\, h_{2n}^{\pm}(\beta)\, u_{\nu_n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\beta R_1, \beta R_2) +$$

$$+ h_{11} h_{21} R_1 R_2 \beta^4 u_{\nu_n+\frac{3}{2},\frac{3}{2}}(\beta R_1, \beta R_2) - h_{1n}^{\pm}(\beta)\, h_{21} R_2 \times \beta^2 v_{\nu_n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\beta R_1, \beta R_2) +$$

$$+ h_{2n}^{\pm}(\beta)\, h_{11} R_1 \beta^2 v_{\nu_n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\beta R_2, \beta R_1) = 0. \tag{6}$$

Тогда левая радиальная функция Грина задачи (1) — (4)

$$W_r^-(t-\tau, r, \mu, \eta, \varphi, \alpha) = \frac{2}{\pi} e^{-k(t-\tau)} \sum_{m=0}^{\infty} E_m \sum_{n,j=1}^{\infty} F_{jn}^{(2)}(t-\tau, r) \times$$

$$\times \frac{P_{\nu_n}^{-m}(\eta)\, P_{\nu_n}^{-m}(\mu)}{\|P_{\nu_n}^{-m}(\mu)\|^2} \cos m(\varphi - \alpha), \tag{7}$$

где

$$F_{jn}^{(2)}(t, r) = H_{jn}^{(1)}(t)\, A_{\nu_n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{(2)}(\beta_{jn} r, \beta_{jn} R_2) +$$

$$+ H_{jn}^{(2)} \bar{h}_{22} u_{\nu_n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\beta_{jn} r, \beta_{jn} R_2);$$

$$H_{jn}^{(1)}(t)=\frac{\Theta_{jn}q_{jn}\operatorname{sh}\bar{q}_{jn}t-G_{jn}\operatorname{ch}\bar{q}_{jn}t}{G_{jn}^2-q_{jn}^2\Theta_{jn}^2};$$

$$H_{jn}^{(2)}(t)=\frac{\Theta_{jn}q_{jn}^2\operatorname{ch}\bar{q}_{jn}t-G_{jn}q_{jn}\operatorname{ch}\bar{q}_{jn}t}{G_{jn}^2-q_{jn}^2\Theta_{jn}^2};$$

$$G_{jn}=G_{\nu_n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\beta_{jn}),\ \Theta_{jn}=\Theta_{\nu_n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\beta_{jn}),\ q_{jn}=q(\beta_{jn}).$$

Доказательство. Оператор Λ_{mn} и интегральный оператор Лапласа L [3] задаче для функции W_r^- ставят в соответствие задачу построения на $[R_1, R_2]$ решения дифференциального уравнения Бесселя

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\left(q^2+\frac{\left(\nu_n+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}{r^2}\right)\right](W_n^-)_{mn}^*=0, \tag{8}$$

$$q^2=a^{-2}(b_0^2p^2+b_1^2p)$$

по краевым условиям

$$\left(h_{11}\frac{d}{dr}+h_{12}p+h_{13}\right)(W_r^-)_{mn}^*|_{r=R_1}=e^{-p\tau+im\alpha}P_{\nu_n}^{-m}(\eta),$$

$$\left(h_{21}\frac{d}{dr}+h_{22}p+h_{23}\right)(W_r^-)_{mn}^*|_{r=R_2}=0. \tag{9}$$

Непосредственно проверяем, что решением задачи (8), (9) является функция

$$(W_r^-)_{mn}^*=\frac{h_{2n}(p)\,U_{\nu_n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(qr,qR_2)-h_{21}R_2q^2V_{\nu_n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(qr,qR_2)}{\Delta_{\nu_n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(p)}\equiv$$

$$\equiv\frac{\Phi_{2n}(r,p)}{\Delta_{\nu_n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(p)}.$$

Здесь

$$\Delta_{\nu_n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(p)=h_{1n}(p)\,h_{2n}(p)\,U_{\nu_n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(qR_1,qR_2)-$$

$$-h_{1n}(p)\,h_{21}R_2q^2V_{\nu_n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(qR_1,qR_2)+$$

$$+h_{2n}(p)\,h_{11}R_1q^2V_{\nu_n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(qR_2,qR_1)-$$

$$-h_{11}h_{21}R_1R_2q^4U_{\nu_n+\frac{3}{2},\frac{3}{2}}(qR_1,qR_2);$$

$$h_{sn}(p)=h_{s1}\nu_nR_s^{-1}+h_{s2}p+h_{s3},\ s=1,2;$$

$$(W_r^-)_{mn}^*=L\Lambda_{mn}[W_r^-].$$

Если, используя формулы обхода

$$I_{\alpha,\nu}(x)=e^{\frac{\pi}{2}i(\nu-\alpha)}J_{\alpha,\nu}(ix),$$

$$K_{\alpha,\nu}(x)=\frac{\pi}{2}e^{\frac{\pi}{2}i(\nu+\alpha)}[J_{\alpha,\nu}(ix)+iN_{\alpha,\nu}(ix)],$$

переписать $\Delta_{\nu_n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(p)$ так:

$$\Delta_{\nu_n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(p)=\frac{\pi}{2}h_{1n}(p)\,h_{2n}(p)u_{\nu_n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(iqR_1,iqR_2)+$$

$$+ h_{11}h_{21}R_1R_2(iq)^4 u_{\nu_n+\frac{3}{2},\frac{3}{2}}(iqR_1, iqR_2) + h_{2n}(p) \times$$

$$\times h_{11}R_1(iq)^2 u_{\nu_n+\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(iqR_2, iqR_1) - h_{1n}(p)\, h_{21}R_2(iq)^2 \times$$

$$\times u_{\nu_n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(iqR_1, iqR_2),$$

то, полагая $iq = \beta$, видим, что функция $(W_r^-)^*_{mn}$ имеет простые полюсы в точках $\beta = \beta_{jn}$, в которых $\Delta_{\nu_n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(p) \equiv 0$.

Согласно обобщенной теореме разложения получаем [3]

$$(W_r^-)^*_{mn} = 2e^{-k(t-\tau)} \sum_{j=1}^{\infty} F_{jn}^{(2)}(t-\tau, r). \tag{10}$$

Применение к разложению (10) оператора Λ_{mn}^{-1} дает уравнение (8).

Лемма 2. Если выполнены условия леммы 1, то правая функция Грина задачи (1) — (4) имеет вид

$$W_r^+(t-\tau, r, \mu, \eta, \varphi, \alpha) = \frac{2}{\pi} e^{-k(t-\tau)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n,j=1}^{\infty} F_{jn}^{(1)}(t-\tau, r) \times$$

$$\times \frac{P_{\nu_n}^{-m}(\eta)\, P_{\nu_n}^{-m}(\mu)}{\| P_{\nu_n}^{-m}(\mu) \|^2} \cos m(\varphi - \alpha), \tag{11}$$

где

$$F_{jn}^{(1)}(t, r) = H_{jn}^{(1)}(t)\, A_{\nu_n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\beta_{jn}r, \beta_{jn}R_1) +$$

$$+ H_{jn}^{(2)}(t)\, \bar{h}_{12} u_{\nu_n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\beta_{jn}r, \beta_{jn}R_1).$$

Доказательство. В образах Лежандра — Фурье по (μ, φ) и Лапласа по t для функции

$$(W_r^+)^*_{mn} = L\Lambda_{mn}[W_r^+]$$

получаем задачу

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \left(q^2 + \frac{\left(\nu_n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}{r^2}\right)\right](W_r^+)^*_{mr} = 0,$$

$$\left(h_{11}\frac{d}{dr} + h_{12}p + h_{13}\right)(W_r^+)^*_{mn}\big|_{r=R_1} = 0, \tag{12}$$

$$\left(h_{21}\frac{d}{dr} + h_{22}p + h_{23}\right)(W_r^+)^*_{mn}\big|_{r=R_2} = -e^{-p\tau+im\alpha} \times P_{\nu_n}^{-m}(\eta).$$

Решением задачи (12) является функция

$$(W_r^+)^*_{mn} = \frac{h_{1n}(p)\, U_{\nu_n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(qr, qR_1) - h_{11}R_1q^2 V_{\nu_n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(qr, qR_1)}{\Delta_{\nu_n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(p)} \equiv$$

$$\equiv \frac{\Phi_{1n}(r, p)}{\Delta_{\nu_n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(p)}.$$

Повторение рассуждений леммы 1 приводит к функции (11).

Лемма 3. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда функция Коши задачи (1) — (4) определяется по формуле

$$K(t, r, \rho, \mu, \eta, \varphi, \alpha) = \frac{b_0^2}{2a^2} e^{-kt} \sum_{m=0}^{\infty} E_m \sum_{n,j=1}^{\infty} F_{jn}(t, r, \rho) \times$$

$$\times \beta_{jn} \frac{P_{\nu_n}^{-m}(\eta) P_{\nu_n}^{-m}(\mu)}{\| P_{\nu_n}^{-m}(\mu) \|^2} \cos m(\varphi - \alpha), \tag{13}$$

где

$$F_{jn}(t, r, \rho) = \begin{cases} F_{jn}^{+}(r, \rho) e^{\bar{q}_{jn} t} + F_{jn}^{-}(r, \rho) e^{-\bar{q}_{jn} t}, & \text{если } R_1 \leqslant r \leqslant \rho \leqslant R_2, \\ F_{jn}^{+}(\rho, r) e^{\bar{q}_{jn} t} + F_{jn}^{-}(\rho, r) e^{-\bar{q}_{jn} t}, & \text{если } R_1 \leqslant \rho \leqslant r \leqslant R_2; \end{cases}$$

$$F_{jn}^{\pm}(x, y) = \frac{A_{jn}(x, y) \pm B_{jn}(x, y)}{G_{jn} \pm q_{jn}\Theta_{jn}};$$

$$A_{jn}(x, y) = A_{\nu_n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(r, \rho, \beta_{jn});$$

$$B_{jn}(x, y) = B_{\nu_n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(r, \rho, \beta_{jn}).$$

Доказательство. Применяя к задаче для функции K операторы Λ_{mn} и L, для K_{mn}^{*} получаем задачу

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \left(q^2 + \frac{\left(\nu_n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}{r^2}\right)\right] K_{mn}^{*} =$$

$$= -\frac{b_0^2}{a^2} P_{\nu_n}^{-m}(\eta) e^{im\alpha} \frac{\delta(r - \rho)}{\rho^2}, \tag{14}$$

$$\left(h_{s1}\frac{d}{dr} + h_{s2}p + h_{s3}\right) K_{mn}^{*}\big|_{r=R_s}, \quad s = 1, 2.$$

Легко убедиться, что

$$K_{mn}^{*}(r, \rho, p) = \frac{b_0^2 q P_{\nu_n}^{-m}(\eta)}{a^2 \Delta_{\nu_n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(p)} \times$$

$$\times \begin{cases} \Phi_{1n}(r, \rho)\Phi_{2n}(\rho, p), & \text{если } R_1 \leqslant r \leqslant \rho \leqslant R_2, \\ \Phi_{1n}(\rho, p)\Phi_{2n}(r, \rho), & \text{если } R_1 \leqslant \rho \leqslant r \leqslant R_2. \end{cases}$$

Применяя к K_{mn}^{*} сначала по известной методике [7] оператор L^{-1}, а затем оператор Λ_{mn}^{-1}, получаем формулу [13].

Лемма 4. При выполнении условий леммы 1 трансверсальная функция Грина задачи (1) — (4) имеет такую конструкцию:

$$W_\theta(t - \tau, r, \rho, \mu, \varphi, \alpha) = \frac{1 - \mu_0^2}{2\rho^2} e^{-k(t-\tau)} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} E_m \sum_{n,j=1}^{\infty} F_{jn}(t - \tau, r, \rho) \beta_{jn} \times$$

$$\times \frac{P_{\nu_n}^{-m}(\mu)}{\| P_{\nu_n}^{-m}(\mu) \|^2} \frac{\partial P_{\nu_n}^{-m}(\mu_0)}{\partial \mu} \cos m(\varphi - \alpha). \tag{15}$$

Доказательство приводится по схеме доказательства леммы 3.

Теорема. Обобщенные температурные поля в полом однородном изотропном шаровом секторе D описывает при наличии главных решений функция

$$T(t, r, \mu, \varphi) = \int_0^t d\tau \int_{\mu_0}^1 d\eta \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{R_1}^{R_2} E(t - \tau, r, \rho, \mu, \eta, \varphi, \alpha) \times$$

$$\times f_1(\tau, \rho, \eta, \alpha)\rho^2 d\rho + \int_0^t d\tau \int_{\mu_0}^1 d\eta \int_0^{2\pi} [W_r^-(t-\tau, r, \mu, \eta, \varphi, \alpha)\psi_1(\tau, \eta, \alpha) +$$

$$+ W_r^+(t-\tau, r, \mu, \eta, \varphi, \alpha)\psi_2(\tau, \eta, \alpha)]\, d\alpha +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{R_1}^{R_2} W_\theta(t-\tau, r, \rho, \mu, \varphi, \alpha) f_6(\tau, \rho, \alpha)\rho^2 d\rho +$$

$$+ \int_{\mu_0}^1 d\eta \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{R_1}^{R_2} K(t, \tau, \rho, \mu, \eta, \varphi, \alpha)\left[f_3(\rho, \eta, \alpha) + \frac{b_1^2}{b_0^2} f_2(\rho, \eta, \alpha)\right)\rho^2 d\rho +$$

$$+ \frac{d}{dt}\int_{\mu_0}^1 d\eta \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{R_1}^{R_2} K(t, r, \rho, \mu, \eta, \varphi, \alpha) f_2(\rho, \eta, \alpha)]\, \rho^2 d\rho. \qquad (16)$$

Доказательство. Перепишем формулу (16) в виде суммы сверток:

$$T = E \underset{t}{*} \underset{\mu}{*} \underset{\varphi}{*} \underset{r}{*} f_1 + W_r^- \underset{t}{*} \underset{\mu}{*} \underset{\varphi}{*} \psi_1 + W_r^+ \underset{t}{*} \underset{\mu}{*} \underset{\varphi}{*} \psi_2 +$$

$$+ W_\theta \underset{t}{*} \underset{\varphi}{*} \underset{r}{*} f_6 + K \underset{\mu}{*} \underset{\varphi}{*} \underset{r}{*} \left[f_3 + \frac{b_1^2}{b_0^2} f_2\right] + \frac{\partial K}{\partial t} \underset{\mu}{*} \underset{\varphi}{*} \underset{r}{*} f_2.$$

Справедливость теоремы вытекает из свойств фундаментальных функций задачи (1) — (4), описанных в леммах 1—4, теорем о непрерывности и непрерывной дифференцируемости сверток [7] и равенства

$$\left(\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} \underset{\mu}{*} \underset{\varphi}{*} \underset{r}{*} f\right)\Bigg|_{t=0} = -b_1^2 b_0^{-2} f.$$

Если в выражении (16) устремить c_q к бесконечности ($b_0 \to 0$, $\tau_r \to 0$), то получим структуру классического температурного поля в шаровом секторе D. Параметры h и β дают возможность из формулы (16) получить решение задачи при задании на одной из двух границ $r = R_j$ или на обеих одновременно любого из граничных условий I, II и III рода.

1. *Карслоу Х. С., Егер Д. К.* Теплопроводность твердых тел.— М. : Наука, 1964.— 487 с.
2. *Кошляков И. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики.— М. : Высш. школа, 1970.— 710 с.
3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного.— М. : Наука, 1973.— 736 с.
4. *Ленюк М. П.* О волновом уравнении теплопроводности.— Укр. мат. журн., 1972, 24, № 6, с. 832—838.
5. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности.— М. : Высш. школа, 1967.— 600 с.
6. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика.— Киев : Наук. думка, 1976.— 310 с.
7. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс.— М. : Наука, 1965.— 328 с.

Черновицкий университет

Поступила в редколегию 03.07.79

УДК 536.21

В. Н. Михайлов

ТЕПЛОПЕРЕДАЧА В ТОНКИХ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИНКАХ СО СЛОЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Рассмотрим задачу определения температурного поля в тонкой анизотропной пластинке толщиной h. Совместим плоскость xOy прямоугольной системы координат xyz со срединной плоскостью пластинки. Считаем, что ось z совпадает с одной из главных осей теплопроводности, а оси x, y — с двумя