

По формуле (14) проведены численные исследования влияния теплоотдачи на распределение температуры в трехслойной плите с различными начальными температурами составляющих. Вычисление частичных сумм проводилось с удвоенной точностью на ЭВМ «БЭСМ-6». Начальные температуры и толщины слоев принимались такими:  $t_1 = t_3 = 400^\circ \text{C}$ ,  $t_2 = 1000^\circ \text{C}$ ,  $T_1 = T_2 = 20^\circ \text{C}$ ,  $X_1 = 0,5$ ,  $X_2 = 0,6$ .

Полученные результаты используются для исследования процесса пресовки стеклотеталей в предположении, что верхний и нижний слой изготовлены из стали 2Х13, а средний — из стекла С95-2. Теплофизические характе-

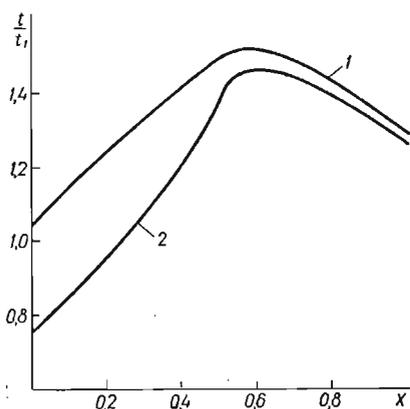


Рис. 2

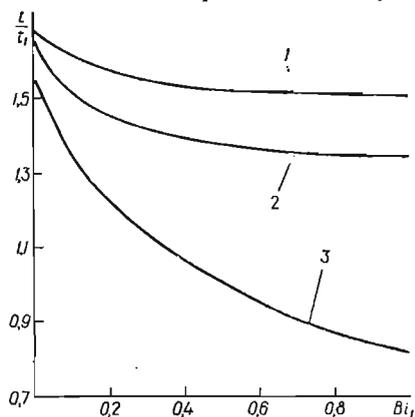


Рис. 3

ристики следующие:  $\lambda_1 = \lambda_3 = 0,075 \text{ кал/см} \cdot \text{с} \cdot \text{град}$ ,  $a_1 = a_3 = 0,75 \text{ см}^2/\text{с}$ ,  $\lambda_2 = 0,04 \text{ кал/см} \cdot \text{с} \cdot \text{град}$ ,  $a_2 = 0,002 \text{ см}^2/\text{с}$ .

Результаты исследований приведены в виде графиков на рис. 2—3. На рис. 2 показано распределение относительной температуры по толщине плиты при  $Fo = 0,01$ ,  $Bi_2 = 1,0$  и значениях  $Bi_1 = 1,0$  (кривая 1),  $Bi_1 = 10,0$  (кривая 2). Анализ полученной зависимости показывает, что с уменьшением теплоотдачи с верхней поверхности температура в плите увеличивается. При этом в среднем слое градиент температуры уменьшается. На рис. 3 показана зависимость относительной температуры в центре среднего слоя плиты ( $X = 0,55$ ) от  $Bi_1$  при  $Bi_2 = 1,0$  и различных значениях числа Фурье  $Fo = 0,01, 0,1, 0,5$  (кривые 1—3 соответственно). Как видно из этого рисунка, температура в центре среднего слоя плиты с увеличением времени уменьшается. Интенсивность уменьшения увеличивается с ростом теплоотдачи.

1. Коляно Ю. М., Процюк Б. В. Термопружность багатозарового цилиндра.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1976, № 8, с. 718—721.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров.— М.: Наука, 1970.— 720 с.
3. Лыков А. В. Теория теплопроводности.— М.: Высш. школа, 1967.— 600 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию  
24.09.79

УДК 517.9

А. П. Слесаренко, О. Н. Бобылева

#### СТРУКТУРНЫЙ МЕТОД В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ СРЕД

Для решения задачи теплопроводности, электростатики и магнитостатики в областях сложной формы с кусочно-однородной средой рассмотрим применение одной модификации структурного метода в сочетании с методом Рит-

па и методом наименьших квадратов. Пусть область  $\Omega$  (рис. 1) представляет собой составное тело с идеальным или неидеальным контактом на границах раздела однородных сред и границы раздела имеют вид  $\Gamma_{i_1} = \{(x, y) \in \Omega : x = a_{i_1}\}, \dots, \Gamma_{i_q} = \{(x, y) \in \Omega : x = a_{i_q}\}$ . Рассмотрим для этой области краевую задачу

$$\operatorname{div}(\lambda(x, y) \operatorname{grad} u(x, y)) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial \nu} + \gamma_0 u(x, y) |_{\Gamma_{01}} = f_1(x, y) |_{\Gamma_{01}}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_{02}} = f_2(x, y) |_{\Gamma_{02}}, \quad (3)$$

$$\lambda_{i_k} \frac{\partial u(a_{i_k} - 0, y)}{\partial x} = \frac{1}{R_{i_k}} [u(a_{i_k} + 0, y) - u(a_{i_k} - 0, y)], \quad (4)$$

$$\lambda_{i_k} \frac{\partial u(a_{i_k} - 0, y)}{\partial x} = \lambda_{i_{k+1}} \frac{\partial u(a_{i_k} + 0, y)}{\partial x} \quad (5)$$

$$(k = 1, \dots, q),$$

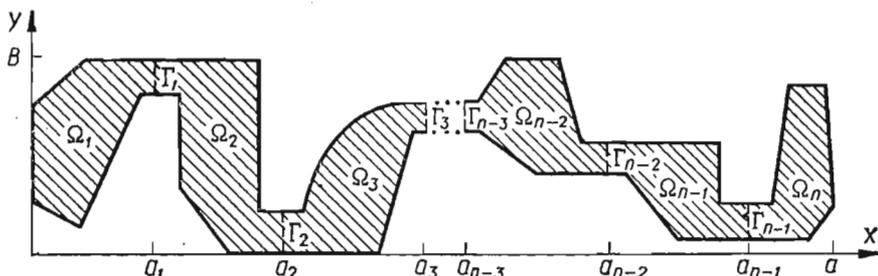


Рис. 1

где  $\Gamma_{01} \cup \Gamma_{02} = \partial\Omega$  — граница области  $\Omega$ ;  $\gamma_0$  — относительный коэффициент теплообмена;  $\lambda_{i_k}$  ( $k = 1, \dots, q$ ) — коэффициенты теплопроводности сред, из которых состоит область  $\Omega$ ;  $\lambda(x, y) = \lambda_i$  при  $(x, y) \in \Omega_i$  ( $i = i_1, \dots, i_q$ );  $\nu$  — внешняя нормаль к поверхности  $\partial\Omega$ ;  $R_{i_k}$  ( $k = 1, \dots, q$ ) — контактное сопротивление на границе раздела сред. В случае  $R_{i_k} = 0$  условие (4) принимает вид

$$u(a_{i_k} + 0, y) = u(a_{i_k} - 0, y).$$

Область  $\Omega$  характеризуется тем, что  $a \gg b$ , поэтому предлагаем разбить ее на  $n$  подобластей так, чтобы  $a_k - a_{k-1}$  ( $k = 1, \dots, n$ ;  $a_0 = 0, a_n = a$ ) и  $b$  отличались друг от друга не более чем в 2—3 раза. Выбор точек  $a_k$  ( $k = 1, \dots, n-1$ ) нужно согласовывать с формой области  $\Omega$ , причем  $\{\Gamma_{i_k}\}_{k=1}^q \subset \{\Gamma_i\}_{i=1}^{n-1}$ . Для всех линий, принадлежащих множеству  $\{\Gamma_i\}_{i=1}^{n-1} \setminus \{\Gamma_{i_k}\}_{k=1}^q$ , условия (4), (5) выглядят следующим образом:

$$u(a_i + 0, y) = u(a_i - 0, y) \quad (R_i = 0, \quad \lambda_i = \lambda_{i+1}), \quad (6)$$

$$\frac{\partial u(a_i - 0, y)}{\partial x} = \frac{\partial u(a_i + 0, y)}{\partial x} \quad (\lambda_i = \lambda_{i+1}), \quad (7)$$

$$i \in \{1, \dots, n-1\} \setminus \{i_1, \dots, i_q\}.$$

Для каждой из полученных подобластей  $\Omega_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) рассмотрим краевую задачу

$$\operatorname{div}(\lambda(x, y) \operatorname{grad} u_i(x, y)) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_i, \quad (8)$$

$$\frac{\partial u_i(x, y)}{\partial \nu} + \gamma_0 u_i(x, y) |_{\Gamma_{i_1}} = f_1(x, y) |_{\Gamma_{i_1}}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial u_i(x, y)}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_i} = f_2(x, y) \Big|_{\Gamma_i}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial u_i(x, y)}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_{i-1}} = -\frac{1}{\lambda_i} \sum_{l=0}^{\rho_{i-1}} a_{i-1,l} y^l, \quad (11)$$

$$\frac{\partial u_i(x, y)}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_i} = \frac{1}{\lambda_i} \sum_{l=0}^{\rho_i} a_{i,l} y^l. \quad (12)$$

Здесь  $i = 1, \dots, n$ , причем в случае  $i = 1$  отсутствует условие (11), в случае  $i = n$  — условие (12);  $\nu$  — внешняя нормаль к границе  $\partial\Omega_i$  области  $\Omega_i$ ;  $\Gamma_{ij} = \Gamma_{0j} \cap \partial\Omega_i$  ( $j = 1, 2$ );  $a_{i-1,l}$ ,  $a_{i,l}$  — неопределенные коэффициенты, которые находим с учетом условия (4) с помощью метода наименьших квадратов. Их количество зависит от каждой конкретной задачи; обычно бывает достаточно одного — трех членов разложения.

В каждой подобласти  $\Omega_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) решение краевой задачи (8) — (12) имеет вид

$$u_i = u_{i,0} + \sum_{l=0}^{\rho_{i-1}} a_{i-1,l} u_i^{(l)} + \sum_{l=0}^{\rho_i} a_{i,l} u_i^{(\rho_{i-1}+l)} \quad (i = 1, \dots, n),$$

где  $\rho_{i-1}$ ,  $\rho_i$  — количество членов разложения в выражениях (11) и (12) соответственно. Суммы, верхней границей которых являются индексы  $\rho_0$  и  $\rho_n$ , отсутствуют;  $u_{i,0}$  удовлетворяет условиям (8) — (10) и однородным условиям (11), (12),  $u_i^{(l)}$  удовлетворяет однородным условиям (8) — (10), (12) и условию

$$\frac{\partial u_i^{(l)}(x, y)}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_{i-1}} = -y^l \quad (l = 0, 1, \dots, \rho_{i-1}),$$

$u_i^{(\rho_{i-1}+l)}$  удовлетворяет однородным условиям (8) — (11) и условию

$$\frac{\partial u_i^{(\rho_{i-1}+l)}(x, y)}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_i} = y^l \quad (l = 0, 1, \dots, \rho_i).$$

На основе результатов работ [5—7] структуру решения [2], удовлетворяющую условиям (9) — (12), представим в виде

$$u = \sum_{k,i} C_{ki} \chi_{ki}(x, y) + g = \sum_{k,i} C_{ki} (1 - \gamma\omega) P_k(x + h_1(x, y)) P_i(y + h_2(x, y)) - \omega\varphi. \quad (13)$$

Здесь

$$\omega(x, y) \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \omega(x, y) > 0 \text{ при } (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial \tau} \Big|_{\partial\Omega} = 1;$$

$\gamma$  — продолженные с границы внутрь области относительные коэффициенты теплообмена;  $\varphi$  — так называемая склейка граничных условий (9) — (12), продолженная внутрь области определенным способом;  $P_k$  — некоторые полиномы (степенные, Чебышева и др.); функции  $h_1(x, y)$  и  $h_2(x, y)$  введены в работе [3] и определяются следующим образом:

$$h_1(x, y) = \omega\left(x - \frac{1}{2}\omega(x, y), y\right) - \omega\left(x + \frac{1}{2}\omega(x, y), y\right),$$

$$h_2(x, y) = \omega\left(x, y - \frac{1}{2}\omega(x, y)\right) - \omega\left(x, y + \frac{1}{2}\omega(x, y)\right).$$

Для отыскания неопределенных постоянных в структуре решения (13) применим метод Ритца. Неопределенные коэффициенты  $a_{i,l}$ , определяем методом наименьших квадратов, что сводится к минимизации функционала

$$\Phi(a_{11}, \dots, a_{1,\rho_1}, \dots, a_{n-1,1}, \dots, a_{n-1,\rho_{n-1}}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^M [u_i(a_i - 0, y_j) - u_{i+1}(a_i + 0, y_j)]^2 = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^M \left[ u_{i,0} - u_{i+1,0} + \sum_{l=0}^{p_i-1} a_{i-1,l} u_i^{(l)} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l=0}^{p_i} a_{i,l} (R_j y_j^l + u_i^{(p_i-1+l)} - u_{i+1}^{(l)}) - \sum_{l=0}^{p_{i+1}} a_{i+1,l} u_{i+1}^{(l)} \right]^2,
\end{aligned}$$

где  $(a_i, y_j) \in \Gamma_i$  ( $j = 1, \dots, M; i = 1, \dots, n$ ). Как показано в работе [9], вычисление коэффициентов  $a_{i,l}$  может быть произведено с большой точностью.

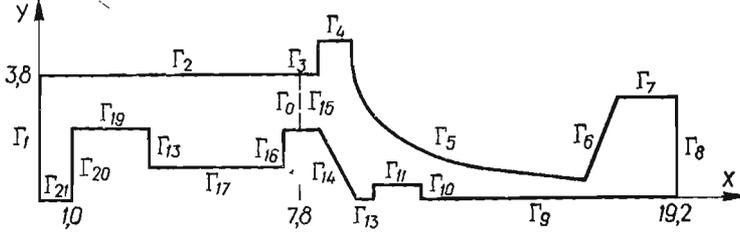


Рис. 2

Такой подход к решению краевых задач позволяет увеличить точность получаемых результатов. Это достигается тем, что полиномы, используемые в структуре, определяются не во всей области, а в каждой подобласти своей, кроме того, в структуре решения используются дополнительно неопределенные коэффициенты  $a_{i,l}$ . Это позволяет существенно увеличить количество координатных функций без увеличения степени используемых полиномов.

Изложенный выше подход применен к решению тестовых задач, в которых рассматривалась одна и та же область (рис. 2).

**Задача 1.** Область  $\Omega$  представляет собой однородную среду,  $\Gamma_0$  — линия разреза области  $\Omega$  на две подобласти  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Рассмотрим случай, для которого точное решение имеет вид

$$u_T = 1 - 0,0001(x^2 - y^2).$$

На участках  $\Gamma_k$  ( $k = 1, 2, 10, 11, 12$ ) происходит теплообмен тела с окружающей средой по закону Ньютона ( $\gamma = 0,02564$  для  $k = 1, 2$ ;  $\gamma = 14,61538$  для  $k = 10, 11, 12$ ), на всех остальных участках заданы условия второго рода. Все функции, входящие в краевые условия, можно выписать в аналитическом виде с учетом формы области и решения  $u_T$ . На  $\Gamma_0$  краевые условия взяты в виде

$$\frac{\partial u_1}{\partial \nu} = a_0 + a_1 y, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = -a_0 - a_1 y,$$

и как показали расчеты, достаточно было взять лишь  $a_0$ , а  $a_1 = 0$ . Согласно изложенной методике поставлены и решены задачи для  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , затем методом наименьших квадратов определены  $a_0$  и  $a_1$  с учетом условия  $u_1 = u_2$  на  $\Gamma_0$ . Получены следующие значения:  $a_0 = -0,156358$  (точное значение  $a_0 = -0,156$ ),  $a_1 = 0$ . Для  $\Omega_1$  относительная погрешность составила не более 0,12%, для  $\Omega_2$  не более 0,28% (см. табл. 1, строка 1; табл. 2, строки 0; 1).

**Задача 2.** Рассмотрим задачу для той же области, где  $\Gamma_0$  — линия идеального контакта ( $R = 0$ ) двух сред, причем  $39\lambda_1 = \lambda_2$ . Для  $\Omega_2$  точное решение осталось прежним, т. е.  $u_{2T} = u_T$ , а для  $\Omega_1$

$$u_{1T} = 1,462384 - 0,05928x - 0,0001(x^2 - y^2).$$

Операторы краевых условий на границе области  $\Omega$  остались прежними, но для  $\Omega_1$  были пересчитаны правые части краевых условий в силу изменения точного решения  $u_{1T}$  в области  $\Omega_1$ . На линии  $\Gamma_0$  предполагаем выполнение

Таблица 1

Номер строки	u	$\Omega_1$							
		$x = 0,6$ $y = 2,5$	$x = 0,4$ $y = 1,5$	$x = 3,5$ $y = 0,7$	$x = 5,0$ $y = 1,3$	$x = 6,5$ $y = 1,9$	$x = 4,5$ $y = 2,5$	$x = 1,8$ $y = 3,1$	$x = 7,2$ $y = 2,8$
1	$u_{1r}$	1,000589	1,000209	0,998824	0,997669	0,996136	0,998600	1,000631	0,995600
	$u_{пр}$	0,999466	0,999438	0,998312	0,998312	0,995202	0,997455	0,999441	0,994412
2	$u_{1r}$	1,4274	1,43888	1,25372	1,16365	1,07320	1,19422	1,35632	1,03117
	$u_{пр}$	1,41883	1,43280	1,25052	1,16312	1,07039	1,19271	1,35275	1,02870
3	$u_{1r}$	609,827	609,839	609,654	609,563	609,473	609,594	609,756	609,431
	$u_{пр}$	610,927	611,229	600,846	610,399	610,546	611,899	611,395	610,403

Таблица 2

Номер строки	u	$\Omega_2$							
		$x = 8,1$ $y = 2,8$	$x = 8,7$ $y = 3,5$	$x = 9,3$ $y = 1,5$	$x = 11,5$ $y = 0,7$	$x = 13,7$ $y = 0,4$	$x = 15,8$ $y = 0,4$	$x = 17,7$ $y = 0$	$x = 17,1$ $y = 1,6$
0	$u_{2r}$	0,994223	0,993656	0,991576	0,986824	0,981247	0,975052	0,968671	0,971015
1	$u_{пр}$	0,992975	0,992245	0,990936	0,985324	0,980037	0,973961	0,967132	0,968235
2	$u_{пр}$	0,993031	0,992298	0,990975	0,995351	0,980064	0,973636	0,967159	0,968262
3	$u_{пр}$	0,992958	0,992228	0,990923	0,985315	0,980029	0,973601	0,967124	0,968227

следующего условия:

$$\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = a_0. \quad (14)$$

Были проведены такие же, как и в задаче 1, расчеты. Получено значение  $\frac{a_0}{\lambda_2} = -0,157379$  (точное значение  $-0,156$ ). Для  $\Omega_1$  получена относительная погрешность 0,32%, для  $\Omega_2$  — 0,28% (см. табл. 1, строка 2; табл. 2, строки 0; 2).

**Задача 3.** Эта задача аналогична задаче 2, только  $\Gamma_0$  — линия неидеального контакта ( $R = 10$ ). В области  $\Omega_1$  точное решение имеет вид

$$u_{1T} = 609,862384 - 0,05928x + 0,0001(y^2 - x^2),$$

в области  $\Omega_2$  оно осталось прежним. Краевые условия выписываем, как и в задаче 2 (изменяются для  $\Omega_1$ ). На линии  $\Gamma_0$  выполняется условие (14), а коэффициент  $a_0$  ищем методом наименьших квадратов из условия

$$\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{\Gamma_0} = \frac{1}{R} (u_2 - u_1) \Big|_{\Gamma_0}.$$

Получено значение отношения  $\frac{a_0}{\lambda_2} = -0,156037$  (точное значение  $-0,156$ ). Относительная погрешность для  $\Omega_1$  составила 0,4%, для  $\Omega_2$  — 0,28% (см. табл. 1, строка 3; табл. 2, строки 0; 3).

Все задачи просчитаны с помощью структуры (13). Для  $\Omega_1$  было взято 16 координатных функций, для  $\Omega_2$  — 49. При решении задачи 1 в постановке для всей области  $\Omega$  была получена существенно худшая погрешность — около 2%. Из задач 2 и 3 видно, что в случае композитных сред, когда отношение  $\lambda_2 : \lambda_1 \gg 1$ , предложенный метод решения дает возможность получить более точный результат (см., например, работу [10]).

1. Рвачев В. Л. Методы алгебры логики в математической физике. — Киев : Наук. думка, 1974. — 259 с.
2. Рвачев В. Л. О понятии структуры решения краевой задачи. — Вест. Харьк. политехн. ин-та, 1973, 72, № 1, с. 3—9.
3. Рвачев В. Л. Метод  $R$ -функций в краевых задачах. — Прикл. механика, 11, № 4, 1965, с. 3—14.
4. Рвачев В. Л., Слесаренко А. П. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. — Киев : Наук. думка, 1976. — 287 с.
5. Рвачев В. Л., Слесаренко А. П. Алгебро-логические и проекционные методы в задачах теплообмена. — Киев : Наук. думка, 1978. — 138 с.
6. Рвачев В. Л., Бобылева О. Н. Формула Тейлора разностного типа. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 1, с. 26—30.
7. Рвачев В. Л., Бобылева О. Н. Структуры разностного типа. — Киев, 1978. — 27 с. — (Препринт / Ин-та пробл. машиностроения АН УССР, № 109).
8. Рвачев В. Л., Бобылева О. Н. О построении обобщенной формулы Тейлора разностного типа. — Укр. мат. журн., 1978, 30, № 6, с. 768—778.
9. Франс Д. М. Аналитическое решение задач о стационарной теплопроводности для тел неправильной формы. — Теплопередача. Сер. С., 1971, 93, № 4, с. 127—131.
10. Трицек, Уитвер. Конечноразностные методы для неоднородных областей. — Теплопередача. Сер. С., 1972, 94, № 3, с. 70—72.

Институт проблем  
машиностроения АН УССР  
Ворошиловградский машиностроительный  
институт

Поступила в редколлегию  
12.06.79

УДК 536.21

М. П. Ленюк, З. Л. Середюк

#### ОБОБЩЕННЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ В ПОЛОМ ШАРОВОМ СЕКТОРЕ

В качестве объекта рассмотрим полый однородный изотропный шаровой сектор  $D = \{(r, \theta, \varphi), R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \theta \leq \theta_0, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ , в котором равномерно распределены тепловые источники. В предположении, что время