

соответствующее граничным условиям (контурные узлы). При этом также реализуются условия (3)—(5) на функцию температуры и метятся узлы в области Ω_N , которые подлежат варьированию по алгоритму (7).

Предложенная методика позволяет провести широкий комплекс исследований по оптимизации напряженно-деформированного состояния гибких оболочек. С этой целью зависимости $E(t)$, $\alpha(t)$, граничные условия, критерий оптимальности (6), а также ограничения на температуру (3)—(5) отдельно записаны в виде подпрограмм, что позволяет их видоизменять. Для оценки точности решения осуществляется пересчет задачи при различных сетках разбиения области оболочки. Результаты считаются приемлемыми, если погрешность при этом составляет не более 10%.

В качестве примера исследовано оптимальное распределение температуры (рисунок) в окрестности прямоугольного контура стальной (1Х18Н9Т) квадратной в плане сферически полой оболочки, жестко защемленной по краям. Ширина зоны нагрева $2l$. По середине зоны, т. е. по контуру $x = \pm c$, $y = \pm d$, достигается максимальная температура t_0 . Другие параметры задачи следующие: $\frac{a}{b} = 1$; $\frac{d}{b} = 0,5$; $\frac{2e}{a} = 0,5$; $t_c = D$; $\frac{\omega_a(0)}{n} = 5$. Определено распределение температуры в указанной окрестности, при котором обеспечивается минимум уровня напряжений $\sigma_x^{(+)}$, $\sigma_y^{(+)}$ на верхней выпуклой поверхности оболочки, т. е. $Q = \max (|\delta_x^{(+)}|, |\delta_y^{(+)}|)$.

На рисунке приведены графики оптимального распределения температуры в зоне нагрева, а именно по осям симметрии (кривая 1) и по диагональному сечению (кривая 2). Как видно из рисунка, наблюдается несимметричность распределения относительно контура с максимальной температурой.

1. Беседина Л. П., Будз С. Ф., Зовуляк Ю. Д. О построении оптимальных по напряжениям температурных полей применительно к условиям термообработки пластин и оболочек.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 7, с. 11—16.
2. Бурак Я. И., Огирко И. В. Оптимальный нагрев цилиндрической оболочки с зависящими от температуры характеристиками материала.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 5, с. 26—30.
3. Микеладзе Ш. Е. Новые методы интегрирования дифференциальных уравнений и их приложение к задачам теории упругости.— М.; Л.: Гостехиздат, 1951.— 527 с.
4. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред.— М.: Мир, 1976.— 464 с.
5. Расчет на прочность, устойчивость и колебание в условиях высоких температур / Н. Н. Безухов, В. Л. Бажанов, И. И. Гольденблат и др.— М.: Машиностроение, 1968.— 566 с.
6. Черноусько Ф. М., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления.— М.: Наука, 1973.— 225 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
04.01.79

УДК 536.12 : 539.377

В. М. Вигак, В. С. Колесов, Л. Д. Величко

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НАГРЕВОМ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОГО ЦИЛИНДРА

В работе [2] разработан метод решения задач оптимального по быстродействию управления нагревом твердого тела при ограничениях на управление и фазовые координаты, в том числе на термоупругие напряжения. Однако при высоких температурах модель упругого тела не охватывает процессов ползучести и релаксации, имеющих место для реальных материалов. Наиболее простой моделью, описывающей указанные процессы в деформируемом твердом теле при высокой температуре, является модель вязкоупругого тела [3, 4]. В настоящей статье на примере построения оптимального по быстродействию управления нагревом сплошного цилиндра при ограничениях на управление и термовязкоупругие напряжения, описываемые вязкоупру-

гой моделью Максвелла, развит аналитический метод [2] решения задачи оптимального управления нестационарным температурным режимом применительно к вязкоупругим телам.

Пусть сплошной длинный вязкоупругий цилиндр нагревается снаружи с помощью конвективного теплообмена

$$T_\rho(1, \tau) + H [T(1, \tau) - t(\tau)] = 0 \quad \left(T_\rho(1, \tau) = \frac{\partial T(\rho, \tau)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1}, \tau \in (0, \tau_0) \right). \quad (1)$$

Требуется найти ограниченную снизу и сверху функцию управления $t(\tau)$ (температуру греющей среды)

$$u_1(\tau) \leq t(\tau) \leq u_2(\tau), \quad (2)$$

чтобы при ограничении на термовязкоупругие напряжения

$$\sigma_1(T) \leq \sigma(T) \leq \sigma_2(T) \quad (3)$$

за минимально короткое время τ_0 нагреть цилиндр из начального стартового состояния

$$T(\rho, 0) = f(\rho) \quad (\rho \in [0, 1]) \quad (4)$$

в конечном $T(\rho, \tau_0)$ с максимальной температурой

$$\max_{\rho} T(\rho, \tau_0) = T_0 \quad (\rho \in [0, 1]) \quad (5)$$

и максимальным перепадом температур

$$\max_{\rho} T(\rho, \tau_0) - \min_{\rho} T(\rho, \tau_0) \leq \delta T \quad (\rho \in [0, 1]). \quad (6)$$

При этом превышение температуры

$$\max_{\rho} T(\rho, \tau) > T_0 \quad (\rho \in [0, 1])$$

недопустимо, а температурное поле удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\Delta T = T_\tau \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}, T_\tau = \frac{\partial T}{\partial \tau}, \rho \in (0, 1), \tau > 0 \right) \quad (7)$$

и условию симметричности

$$T_\rho(0, \tau) = 0 \quad (\tau \in [0, \tau_0]). \quad (8)$$

Здесь все обозначения и сокращения взяты из работы [2].

Ключевым вопросом при решении задачи управления (1) — (8) является [2] решение неклассической задачи теплопроводности (4), (7), (8) при условии

$$\sigma(T) = b_1 - c_1 T(1, \tau), \quad (9)$$

или

$$\sigma(T) = b_2 - c_2 T(0, \tau). \quad (10)$$

Но для построения решения таких задач теплопроводности следует располагать функциональной зависимостью расчетных термовязкоупругих напряжений $\sigma(T)$ от температурного поля цилиндра $T(\rho, \tau)$. Используя принцип соответствия [3], для вязкоупругой модели Максвелла аналогично работе [1] получим выражение для расчетных тангенциальных температурных напряжений в сплошном длинном цилиндре со свободными концами в виде

$$\bar{\sigma}_\varphi(\rho, s) = \frac{s}{s + \gamma_n} \bar{\sigma}_\varphi^*(\rho, s) + \frac{12\mu^2 \eta_n s}{(3k + 4\mu)(\eta_n s + \mu)(s + \gamma_n)} \left[Z_n(\rho) - \int_0^1 \rho Z_n(\rho) d\rho - \right. \\ \left. - \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho \rho Z_n(\rho) d\rho \right] - \frac{\mu \eta_n}{\eta_n s + \mu} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\eta_i} \int_0^{\tau_i} \sigma_\varphi(\rho, \tau) d\tau, \quad (11)$$

где

$$Z_n(\rho) = \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \frac{1}{4\eta_i} \int_0^{\tau_i} [\sigma_\varphi(\rho, \tau) + \sigma_\rho(\rho, \tau)] d\tau - \frac{\mu}{4\eta_i(3k + \mu)} \int_0^{\tau_i} [\sigma_\varphi(\rho, \tau) + \right.$$

$$+ \sigma_0(\rho, \tau) + 6k\alpha T(\rho, \tau) \exp \kappa_i \tau dt \exp (-\kappa_i \tau_i - \kappa_{i-1} \tau_{i-1} - \dots - \kappa_{n-1} \tau_{n-1}) \Big\};$$

$$\gamma_i = \frac{3k\mu}{(3k + 4\mu)\eta_i}; \quad \eta_i = \eta_i^* \frac{a}{R^2}; \quad \kappa_i = \frac{3k\mu}{(3k + 4\mu)\eta_i};$$

τ_i — продолжительность предварительного i -го этапа нагрева; k, μ — модули объемной упругости и сдвига материала; η_i, a, α — коэффициенты вязкости, температуропроводности и линейного расширения; R — радиус цилиндра; $\bar{\sigma}(\rho, s)$ — изображение по Лапласу тангенциальных температур-

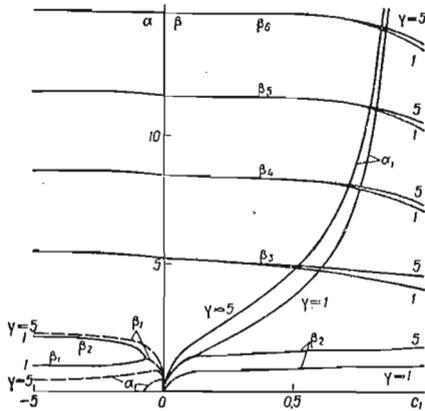


Рис. 1

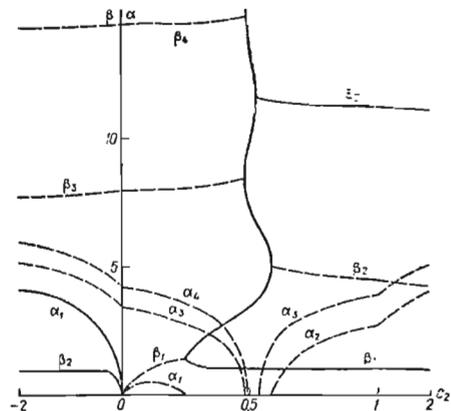


Рис. 2

ных напряжений $\sigma_{\psi}(\rho, \tau)$; σ_{φ} — тангенциальные термоупругие напряжения в сплошном цилиндре, которые выражаются [1] так:

$$\sigma_{\varphi}^*(\rho, \tau) = \frac{18\mu k\alpha}{3k + 4\mu} \left[\int_0^1 \rho T(\rho, \tau) d\rho + \frac{1}{\rho^2} \int_0^{\rho} \rho T(\rho, \tau) d\rho - T(\rho, \tau) \right] \quad (\rho \neq 0);$$

$$\sigma_{\varphi}^*(0, \tau) = \frac{18\mu k\alpha}{3k + 4\mu} \left[\int_0^1 \rho T(\rho, \tau) d\rho - 0,5T(0, \tau) \right].$$

Решение задачи теплопроводности (4), (7) — (9) либо (4), (7), (8), (10) с использованием выражения (11) для температурных напряжений можно представить в виде

$$T(\rho, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{\tau} b_*(\tau - \eta) T_1(\rho, \eta) d\eta + \int_0^1 f(\eta) \eta T_2(\rho, \eta, \tau) d\eta \quad (\tau \in (0, \tau_0]),$$

где для задачи (4), (7) — (9)

$$b_*(\tau) = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{\tau} b_1(\tau - \eta) (1 + \gamma_n \eta) d\eta + \frac{2\mu}{3k\alpha} \left[2 \int_0^1 \rho Z_n(\rho) d\rho - Z_n(1) \right] \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\mu}{\eta_n} \tau\right) + \frac{\mu}{h} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\eta_i} \int_0^{\tau_i} \sigma_{\varphi}(1, \tau) d\tau \left[\frac{\gamma_n \eta_n}{\mu} + \left(1 - \frac{\gamma_n \eta_n}{\mu}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left(-\frac{\mu}{\eta_n} \tau\right) \right];$$

$$T_1(\rho, \tau) = \sum_{n=0}^1 \varphi_n(\rho) \tau^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp \lambda_n^2 \tau}{\Delta(\lambda_n)} I_0(\lambda_n \rho); \quad (12)$$

$$T_2(\rho, \eta, \tau) = \psi(\rho, \eta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp \lambda_n^2 \tau}{\Delta(\lambda)} I_0(\lambda_n \rho) \{-2 + [2\lambda_n K_1(\lambda_n) +$$

$$+ (\lambda_n^2 - \lambda_n^2 c_1 - \gamma_n c_1) K_0(\lambda_n)] I_0(\lambda_n \eta)\};$$

$$\Delta(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} (\lambda^2 - \gamma_n c_1) I_0(\lambda) - \frac{0,5}{\lambda} (4 + \lambda^2 - \lambda^2 c_1 - \gamma_n c_1) I_1(\lambda);$$

$$\lambda_n = \alpha_n \pm i\beta_n \quad (n = 1, 2, \dots; i = \sqrt{-1}) \text{ — корни уравнения} \\ 2\lambda I_1(\lambda) = (\lambda^2 - \lambda^2 c_1 - \gamma_n c_1) I_0(\lambda); \quad (13)$$

для задачи (4), (7), (8), (10)

$$b_*(\tau) = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau b_2(\tau - \eta) (1 + \gamma_n \eta) d\eta + \frac{2\mu}{3k\alpha} \left[\int_0^1 \rho Z_n(\rho) d\rho - 0,5 Z_n(0) \right] \times \\ \times \exp\left(-\frac{\mu}{\eta_n} \tau\right) + \frac{\mu}{h} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\eta_i} \int_0^{\tau_i} \sigma_\varphi(0, \tau) d\tau \left[\frac{\gamma_n \eta_n}{\mu} + \left(1 - \frac{\gamma_n \eta_n}{\mu}\right) \times \right. \\ \left. \times \exp\left(-\frac{\mu}{\eta_n} \tau\right) \right]; \quad (14)$$

$$T_1(\rho, \tau) = \sum_{n=0}^1 \varphi_n(\rho) \tau^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp \lambda_n^2 \tau}{\Delta(\lambda_n)} I_0(\lambda_n \rho);$$

$$T_2(\rho, \eta, \tau) = \psi(\rho, \eta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp \lambda_n^2 \tau}{\Delta(\lambda_n)} I_0(\lambda_n \rho) \{-1 + \lambda_n [I_1(\lambda_n) K_0(\lambda_n \eta) + \\ + I_0(\lambda_n \eta) K_1(\lambda_n)]\}; \quad \Delta(\lambda) = 0,5 [I_0(\lambda) - 1 + 2c_2]; \quad h = \frac{18\mu k \alpha}{3k + 4\mu};$$

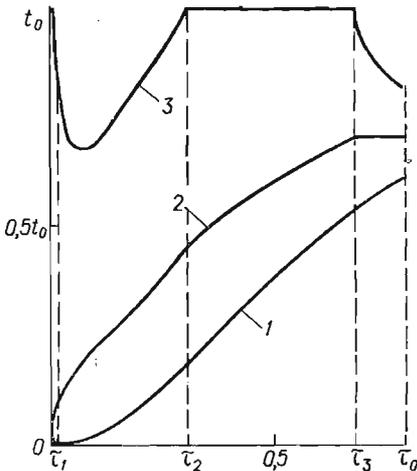


Рис. 3

$\lambda_n = \alpha_n \pm i\beta_n \quad (n = 1, 2, \dots)$ — корни уравнения

$$\lambda I_1(\lambda) = 0,5\lambda^2 - (\gamma_n + \lambda^2) c_2. \quad (15)$$

На рис. 1 и 2 показано поведение корней уравнений (13), (15), откуда видно, что при $c_1 = c_2 = 0$ эти уравнения имеют двукратные нулевые корни $\lambda = 0$. Поэтому для выражений (12) $\varphi_0(\rho) = \frac{2}{3}(1 - 3\rho^2)$, $\varphi_1(\rho) = -8$, $\psi(\rho, \eta) = 4(1 - \eta^2)$, а для выражений (14) $\varphi_0(\rho) = -\frac{2}{3}(1 - 6\rho^2)$, $\varphi_1(\rho) = 16$, $\psi(\rho, \eta) = 4(1 - \eta^2) \ln \eta$. В остальных случаях при $c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$ $\varphi_n(\rho) = \psi(\rho, \eta) \equiv 0$.

Найденные температурные поля позволяют по известной методике [2] для рассматриваемой здесь задачи построить оптимальное управление.

В качестве примера проведен расчет оптимального управления цилиндра при следующих исходных данных: $f(\rho) = u_1(\tau) = c_1 = 0$, $u_2(\tau) = t_0 = \text{const}$, $b_1 = -0,1ht_0$, $H = \gamma_n = 1$, $T_0 = 0,7t_0$, $\delta T = 0,1t_0$, а напряжения растяжения не ограничивают скорости нагрева цилиндра. На рис. 3 приведены расчетные данные для искомого управления $t(\tau)/t_0$ (кривая 3) и изменения температур цилиндра $T(0, \tau)/t_0$ (кривая 1), $T(1, \tau)/t_0$ (кривая 2).

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений.— М.: Мир, 1964.— 517 с.
2. Вигак В. М. Оптимальное управление нестационарными температурными режимами.— Киев: Наук. думка, 1979.— 360 с.
3. Москвитин В. В. Сопrotивление вязкоупругих материалов применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе.— М.: Наука, 1972.— 328 с.
4. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела.— М.: Наука, 1979.— 744 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР
Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию
19.11.79