

И. В. Огирко

**МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ
ТЕРМОНАПРЯЖЕНИЙ ГИБКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ
В ПЛАНЕ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК**

Обзор исследований построения оптимальных температурных полей применительно к условиям локальной термообработки оболочек приведен в статье [1]. В отмеченных исследованиях оптимальные температурные поля и напряжения определялись исходя из уравнений термоупругости для оболочек малого прогиба. С целью расширения области эффективного применения высоко-температурной локальной термообработки, а также для более полного и рационального использования запасов прочности оболочки необходимо учитывать геометрическую и физическую нелинейность. Это в свою очередь вызвало необходимость развития соответствующей математической методики оптимизации, основанной на применении численных методов.

Рассмотрим гибкую пологую оболочку размером $2a \times 2b$, толщины $2h$, подвергающуюся температурному воздействию. Оболочку отнесем к координатам x, y ($-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b$). Разрешающие уравнения термоупругости оболочки конечного прогиба с температурной зависимостью характеристик материала относительно прогиба w и функции напряжений Φ имеют вид [5]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + 2(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \left[k_x + \frac{\partial^2 (w + w_n)}{\partial x^2} \right] + \\ & + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \left[k_y + \frac{\partial^2 (w + w_n)}{\partial y^2} \right] - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (w + w_n)}{\partial x \partial y} + q(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{1}{D_0} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \right] + 2(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{D_0} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right) + \\ & + (1-\nu) \nabla^2 \left(\frac{N_t}{D_0} \right) = (1-\nu^2) \left[\left(\frac{\partial^2 (w + w_n)}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x \partial y} \right)^2 - \right. \\ & \left. - \frac{\partial^2 (w + w_n)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_n)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} - k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$D_0(x, y) = \frac{h}{1-\nu} E, \quad D_2(x, y) = \frac{h^2}{1-\nu^2} E, \quad N_t = \frac{h}{1-\nu} E \alpha t,$$

k_x, k_y — главные кривизны недеформированной срединной поверхности; $w_n(x, y)$ — начальный прогиб оболочки; $t(x, y)$ — постоянное по толщине температурное поле; $E = E(t)$ — модуль упругости; $\alpha = \alpha(t)$ — коэффициент температурного линейного расширения; ν — коэффициент Пуассона; $q(x, y)$ — интенсивность силовой нагрузки.

В рассматриваемой оболочке нагревается окрестность Ω некоторого выпуклого замкнутого контура γ . При этом температура достигает максимального значения $t_\gamma(x, y)$ по этой линии, т. е.

$$t|_\gamma = t_\gamma(x, y), \quad t_{n_\gamma}|_\gamma = 0, \quad (3)$$

где n_γ — нормаль к линии γ . По контуру области нагрева Ω — внутреннему γ_0 и внешнему γ_1 — эта температура равна температуре внешней среды t_0 :

$$t|_{\gamma_0} = t|_{\gamma_1} = t_0. \quad (4)$$

Требуется также выполнение условий

$$t_{n_{\gamma_0}}|_{\gamma_0} = 0, \quad t_{n_{\gamma_1}}|_{\gamma_1} = 0, \quad (5)$$

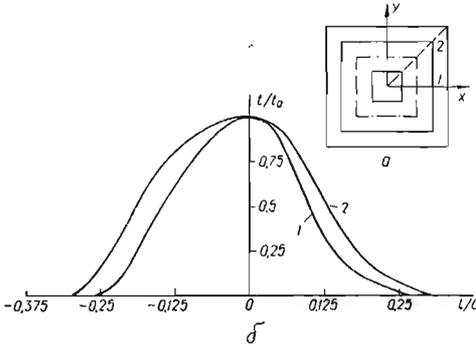
которые обеспечат гладкость функции температуры по краям нагрева. Здесь n_{γ_0} и n_{γ_1} — нормали соответственно к линиям γ_0 и γ_1 .

Необходимо найти распределение температуры в указанной области Ω , удовлетворяющее условиям (3) — (5) и обеспечивающее минимум требуемого критерия оптимальности

$$\min Q [t]. \quad (6)$$

В качестве величины Q может выступать функционал энергии упругой деформации оболочки [2], уровень напряжений, уровень прогиба или другая требуемая характеристика напряженно-деформированного состояния, которая изменяется при изменении нагрева.

Для решения поставленной нелинейной экстремальной задачи



(1) — (6) предлагается численная методика, включающая два этапа: построение дискретного аналога задачи и численное решение полученной задачи нелинейного программирования. Построение дискретного аналога задачи осуществляется с помощью метода конечных разностей повышенной точности [2, 3]. Сетка с узлами (x_i, y_j) характеризуется номером вертикали i и горизонтали j , на пересечении которых лежит узел. Замена производных с повышенной точностью осуществляется согласно формулам, приведенным в работе [3]. При этом область Ω переходит в область Ω_N . С целью более точного описания контуров $\gamma_0, \gamma, \gamma_1$ в алгоритме аппроксимации дискретной задачи предполагается, что сетка вблизи их может сгущаться.

Для решения конечномерного аналога задачи (1) — (6) применяется итерационный метод локальных вариаций [6] в сочетании с методом нелинейной релаксации [2]. С этой целью задается начальное приближение $\{t_{ij}^{(0)}\}$ функции температуры в узлах сетки, удовлетворяющее условиям (3) — (6). Последовательная локальная вариация осуществляется по формуле

$$t_{ij}^{(n+1)} = \begin{cases} t_{ij}^{(n)}, & \text{если } (Q_N [t_{ij}^{(n)}] \leq Q_N [t_{ij}^{(n)} + \delta]) \wedge (Q_N [t_{ij}^{(n)}] \leq Q_N [t_{ij}^{(n)} - \delta]), \\ t_{ij}^{(n)} + \delta, & \text{если } (Q_N [t_{ij}^{(n)} + \delta] < Q_N [t_{ij}^{(n)}]) \wedge (Q_N [t_{ij}^{(n)} + \delta] < Q_N [t_{ij}^{(n)} - \delta]), \\ t_{ij}^{(n)} - \delta & \text{в других случаях,} \end{cases} \quad i, j \in \Omega_N, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7)$$

где $Q_N [t_{ij}^{(n)}]$ — дискретный аналог критерия оптимальности (6), при значении температуры $t_{ij}^{(n)}$ в узле (x_i, y_j) и соответствующему напряженно-деформированному состоянию оболочки; δ — шаг варьирования.

Для определения напряженно-деформированного состояния при каждом локальном варьировании значения $t_{ij}^{(n)}$ прямая дискретная задача (аналог уравнений (1), (2) и граничных условий) решается методом нелинейной релаксации [2, 4]. После полной сходимости процесса (7) шаг варьирования дробится по алгоритму $\delta^{(k+1)} = \delta^{(k)}/2$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) и весь процесс продолжается аналогично, пока не будет достигнута требуемая точность решения.

Для реализации задачи на ЭВМ необходима следующая информация: кривые зависимостей характеристик материала E, α от температуры, геометрия оболочки, а также сетка разбиения области оболочки, которая задается специальными массивами ячеек — точек. После ввода данной информации осуществляется последовательный обход ячеек — точек и определяется, следует ли для данного узла составлять конечно-разностные уравнения (1) и (2) (внутренние узлы), или же конечно-разностное уравнение,

соответствующее граничным условиям (контурные узлы). При этом также реализуются условия (3)—(5) на функцию температуры и метятся узлы в области Ω_N , которые подлежат варьированию по алгоритму (7).

Предложенная методика позволяет провести широкий комплекс исследований по оптимизации напряженно-деформированного состояния гибких оболочек. С этой целью зависимости $E(t)$, $\alpha(t)$, граничные условия, критерий оптимальности (6), а также ограничения на температуру (3)—(5) отдельно записаны в виде подпрограмм, что позволяет их видоизменять. Для оценки точности решения осуществляется пересчет задачи при различных сетках разбиения области оболочки. Результаты считаются приемлемыми, если погрешность при этом составляет не более 10%.

В качестве примера исследовано оптимальное распределение температуры (рисунок) в окрестности прямоугольного контура стальной (1Х18Н9Т) квадратной в плане сферически полой оболочки, жестко защемленной по краям. Ширина зоны нагрева $2l$. По середине зоны, т. е. по контуру $x = \pm c$, $y = \pm d$, достигается максимальная температура t_0 . Другие параметры задачи следующие: $\frac{a}{b} = 1$; $\frac{d}{b} = 0,5$; $\frac{2e}{a} = 0,5$; $t_c = D$; $\frac{\omega_a(0)}{n} = 5$. Определено распределение температуры в указанной окрестности, при котором обеспечивается минимум уровня напряжений $\sigma_x^{(+)}$, $\sigma_y^{(+)}$ на верхней выпуклой поверхности оболочки, т. е. $Q = \max (|\delta_x^{(+)}|, |\delta_y^{(+)}|)$.

На рисунке приведены графики оптимального распределения температуры в зоне нагрева, а именно по осям симметрии (кривая 1) и по диагональному сечению (кривая 2). Как видно из рисунка, наблюдается несимметричность распределения относительно контура с максимальной температурой.

1. Беседина Л. П., Будз С. Ф., Зовуляк Ю. Д. О построении оптимальных по напряжениям температурных полей применительно к условиям термообработки пластин и оболочек.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 7, с. 11—16.
2. Бурак Я. И., Огирко И. В. Оптимальный нагрев цилиндрической оболочки с зависящими от температуры характеристиками материала.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 5, с. 26—30.
3. Микеладзе Ш. Е. Новые методы интегрирования дифференциальных уравнений и их приложение к задачам теории упругости.— М.; Л.: Гостехиздат, 1951.— 527 с.
4. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред.— М.: Мир, 1976.— 464 с.
5. Расчет на прочность, устойчивость и колебание в условиях высоких температур / Н. Н. Безухов, В. Л. Бажанов, И. И. Гольденблат и др.— М.: Машиностроение, 1968.— 566 с.
6. Черноусько Ф. М., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления.— М.: Наука, 1973.— 225 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
04.01.79

УДК 536.12 : 539.377

В. М. Вигак, В. С. Колесов, Л. Д. Величко

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НАГРЕВОМ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОГО ЦИЛИНДРА

В работе [2] разработан метод решения задач оптимального по быстродействию управления нагревом твердого тела при ограничениях на управление и фазовые координаты, в том числе на термоупругие напряжения. Однако при высоких температурах модель упругого тела не охватывает процессов ползучести и релаксации, имеющих место для реальных материалов. Наиболее простой моделью, описывающей указанные процессы в деформируемом твердом теле при высокой температуре, является модель вязкоупругого тела [3, 4]. В настоящей статье на примере построения оптимального по быстродействию управления нагревом сплошного цилиндра при ограничениях на управление и термовязкоупругие напряжения, описываемые вязкоупру-