$$D_{u_z^s} = \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} D_{1k} \,| u_{zk}^{(1)s} (\rho, \tau) |^2,$$

$$D_{u_z^d} = \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{\infty} D_{ik} \,| u_{rik}^{(1)d} (\rho, \tau) |^2,$$

где функции $u_{zk}^{(1)s}$, $u_{zik}^{(1)d}$ определяются выражениями (18) и (21) с учетом (23) соответственно.

В случае, когда случайные переменные ξ_{1k} и ξ_{2k} имеют гауссовские законы распределения, на основании математических ожиданий $u_z^{(0)s}$, $u_z^{(0)d}$ и дисперсий $D_{u_z^s}$, $D_{u_z^d}$ можно определять вероятности изменения квазистатического и динамического прогибов пластины при фиксированных значениях ρ_c, τ_r в заданных интервалах.

1. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости.— Киев : Наук. думка, 1970.— 307 с.
2. *Ломакин В. А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел.— М. : Наука, 1970.— 139 с.
3. *Пугачев В. С.* Теория случайных функций.— М. : Физматгиз, 1960.— 884 с.
4. *Швец Р. Н., Елейко В. И.* Стохастическая задача теплопроводности для пластины.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1976, вып. 4, с. 20—26.
5. *Швец Р. Н., Елейко В. И.* Колебания трансверсально-изотропных пластин, возбужденные случайным температурным полем.— В кн.: Композиционные материалы и новые конструкции. Киев : Наук. думка, 1977, с. 60—65.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 19.11.79

УДК 539.377

Р. Н. Швец, В. М. Флячок

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ И ТЕОРЕМА ВЗАИМНОСТИ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ТЕРМОУПРУГИХ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

Вариационные принципы теории упругости нашли широкое применение в теории оболочек и часто используются для получения как основных дифференциальных уравнений, так и приближенных решений [1—6]. В настоящей статье предложен вариационный принцип, характеризующий линейную краевую задачу с неоднородными начальными условиями для термоупругих анизотропных оболочек с учетом поперечных сдвиговых и нормальных деформаций. Из сформулированного принципа выведена теорема взаимности, которая используется для представления решений рассматриваемых задач в квадратурах.

1. Основные уравнения теории сопряженной термоупругости анизотропных оболочек. Рассмотрим анизотропную оболочку с постоянной толщиной, срединная поверхность G которой ограничена контуром g и отнесена к ортогональным координатам α_j ($j = 1, 2$). Пусть k_j — главные кривизны; A_j — коэффициенты Ламе. Под воздействием силовых и температурных факторов в оболочке возникнут: поле перемещений u_r, γ_r и потоки тепла $H_r^{(j)}$; температурное поле T_j и энтропия S_j, усилия-моменты $N = \{N_{ij}; Q_i; N_{33}; M_{ij}; M_{i3}\}$ и деформации $\varepsilon = \{\varepsilon_{ij}; \varepsilon_{i3}; \varepsilon_{33}; \varkappa_{ij}; \varkappa_{i3}\}$ как функции координат α_j и времени τ.

Если предположить, что перечисленные функции обладают соответствующими свойствами гладкости, то термомеханическое состояние оболочки описывается [6,7] уравнениями движения

$$L_1^q(N) \equiv (A_1A_2)^{-1} [(A_2N_{11})_{,1} - A_{2,1}N_{22} + A_{1,2}N_{12} + (A_1N_{21})_{,2} +$$

$$+ A_1A_2k_1Q_1] = \rho_1\ddot{u}_1 - q_1 \quad (1 \rightleftarrows 2), \qquad (1)$$

$$L_3^Q(N) \equiv (A_1A_2)^{-1}[(A_2Q_1)_{,1} + (A_1Q_2)_{,2} - k_1N_{11} - k_2N_{22}] = \rho_1\ddot{u}_3 - q_3,$$

$$L_1^m(N) \equiv (A_1A_2)^{-1}[(A_2M_{11})_{,1} - A_{2,1}M_{22} + (A_{1,2}M_{12}) + (A_1M_{21})_{,2} + A_1A_2Q_1] =$$

$$= \rho_2\ddot{\gamma}_1 - m_1 \quad (1 \rightleftarrows 2),$$

$$L_3^m(N) \equiv (A_1A_2)^{-1}[(A_2M_{13})_{,1} + (A_1M_{23})_{,2}] - k_1M_{11} - k_2M_{22} - N_{33} = \rho_2\ddot{\gamma}_3 - m_3,$$

уравнениями сохранения энергии

$$T_0\dot{S}_k = -(A_1A_2)^{-1}\sum_i (A_{3-i}H_i^{(k)})_{,i} - \frac{2k-1}{2h}[q^+ + (-1)^{3-k}q^- -$$

$$-2(k-1)H_3^{(1)}] + W_k' \quad (k = 1, 2), \tag{2}$$

уравнениями состояния

$$N_{ji} = \tilde{B}_{ijkl}^{(0)}\varepsilon_{kl} + \tilde{B}_{ijkl}^{(1)}\varkappa_{kl} + \tilde{B}_{ij33}^{(0)}\varepsilon_{33} - 2h\tilde{\beta}_{ji}S_1,$$

$$Q_i = B_{i3k3}^{(0)}\varepsilon_{k3} + B_{i3k3}^{(1)}\varkappa_{k3}; \quad M_{i3} = B_{i3k3}^{(1)}\varepsilon_{k3} + B_{i3k3}^{(2)}\varkappa_{k3},$$

$$N_{33} = \tilde{B}_{33kl}^{(0)}\varepsilon_{kl} + \tilde{B}_{33kl}^{(1)}\varkappa_{kl} + \tilde{B}_{3333}^{(0)}\varepsilon_{33} - 2h\tilde{B}_{33}S_1, \tag{3}$$

$$M_{ji} = \tilde{B}_{ijkl}^{(1)}\varepsilon_{kl} + \tilde{B}_{ijkl}^{(2)}\varkappa_{kl} + \tilde{B}_{ij33}^{(1)}\varepsilon_{33} - \frac{2h^2}{3}\tilde{\beta}_{ji}S_2,$$

$$S_k = \frac{c_\varepsilon}{T_0}T_k + (2-k)(\beta_{ij}\varepsilon_{ij} + \beta_{33}\varepsilon_{33}) + (k-1)h\beta_{ij}\varkappa_{ij} \quad (k = 1, 2),$$

соотношениями, связывающими компоненты теплового потока с температурой:

$$H_i^{(k)} = -\sum_j^2 \frac{\lambda_{ij}}{A_j}T_{k,j}, \quad H_3^{(1)} = -\frac{\lambda_{33}}{h}T_2, \quad q^\pm = \alpha_z^\pm(t^\pm - t_\cdot^\pm), \tag{4}$$

геометрическими соотношениями

$$\varepsilon_{11} = A_1^{-1}u_{1,1} + (A_1A_2)^{-1}u_2A_{1,2} + k_1u_3 \equiv \nabla_{11}(u); \quad \varkappa_{11} = \nabla_{11}(\gamma),$$

$$\varepsilon_{12} = A_1^{-1}u_{2,1} - (A_1A_2)^{-1}u_1A_{1,2} \equiv \nabla_{12}(u), \quad \varkappa_{12} = \nabla_{12}(\gamma), \tag{5}$$

$$\varepsilon_{13} = A_1^{-1}u_{3,1} - k_1u_1 + \gamma_1 \equiv \nabla_{13}(u, \gamma_1), \quad \varkappa_{13} = A_1^{-1}\gamma_{3,1} \equiv \nabla_{13}(\gamma_3),$$

$$\varepsilon_{33} = \gamma_3 \quad (1 \rightleftarrows 2)$$

при начальных ($\tau = 0$)

$$u_r = \overset{0}{u}_r, \quad \dot{u}_r = \dot{\overset{0}{u}}_r, \quad \gamma_r = \overset{0}{\gamma}_r, \quad \dot{\gamma}_r = \dot{\overset{0}{\gamma}}_r, \tag{6}$$

$$S_k = S_k^0 \tag{7}$$

и граничных на контуре g ($g = g_N \cup g_u = g_s \cup g_T$)

$$N_j = \overline{N}_j, \quad Q = \overline{Q}, \quad M_j = \overline{M}_j, \quad M_3 = \overline{M}_3, \quad \alpha_i \in g_N, \tag{8}$$

$$u_j = \overline{u}_j, \quad u_3 = \overline{u}_3, \quad \gamma_j = \overline{\gamma}_j, \quad \gamma_3 = \overline{\gamma}_3, \quad \alpha_i \in g_u, \tag{9}$$

$$\sum_{i,j} \frac{\lambda_{ij}}{A_i}T_{k,j}n_i + \alpha_g(T_k - T_k^c) = 0, \quad \alpha_i \in g_s, \tag{10}$$

$$T_k = \overline{T}_k, \quad \alpha_i \in g_T \tag{11}$$

условиях. Здесь

$$\{T_j, S_j, H_r^{(j)}, W_j'\} = \frac{2j-1}{2h^j}\int_{-h}^{h}\{t, s, q_r^t, w_t\}z^{j-1}dz; \quad q^\pm = \pm q_3^t|_{z=\pm h};$$

$$\tilde{B}^{(p)}_{ijkl} = B^{(p)}_{ijkl} + \beta_{ij}\tilde{\beta}_{kl}; \quad \tilde{\beta}_{kl} = \frac{T_0}{c_\varepsilon}\beta_{kl}; \quad \{t^\pm, t^\pm_c\} = \{t, t_c\}\,|_{z=\pm h};$$

$$\{N_j, Q, M_j, M_3\} = \{N_{ij}, Q_i, M_{ij}, M_{i3}\}\, n_i; \quad B^{(p)}_{ijkl},\ B^{(p)}_{ij33},\ B^{(p)}_{i3j3},\ B^{(p)}_{3333}$$

и β_{ij}, β_{33} — характеристики жесткости и теплового расширения оболочки; λ_{ij}, λ_{33} — коэффициенты теплопроводности; $t = T - T_0$ — приращение температуры; s — плотность энтропии; q^t_r — компоненты вектора теплового потока; w_t — плотность внутренних источников; $\alpha^\pm_z$, α_g — коэффициенты теплоотдачи с поверхностей $z = \pm h$ и контура g; индексы i, j, k, l пробегают значения 1, 2, а индекс r — значения 1, 2, 3.

Теорема. Функции N, u_r, γ_r, T_j, S_j, $H^{(j)}_r$ удовлетворяют уравнениям (1), (2) и начальным условиям (6), (7) тогда и только тогда, если они удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} &l_g * L^q_r(N) + \psi^q_r - \rho_1 u_r = 0,\\ &l_g * L^m_r(N) + \psi^m_r - \rho_2\gamma_r = 0; \end{aligned} \tag{12}$$

$$T_0 S_k = \psi^t_k - l_t * \left\{(A_1A_2)^{-1}\sum_i^2 (A_{3-i}H^{(k)}_i)_{,i} + \frac{2k-1}{2h}\left[q^+ + (-1)^{3-k}q^- - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2(k-1)H^{(1)}_3\right]\right\}, \quad \left(l * L = \int_0^\tau l(\tau')\,L(\tau-\tau')\,d\tau'\right), \tag{13}$$

где

$$\psi^q_r(\alpha_j, \tau) = [l_g * q_r](\alpha_j, \tau) + \rho_1[\tau\dot{u}^0_r(\alpha_j) + u^{(0)}_r(\alpha_j)];$$

$$\psi^m_r(\alpha_j, \tau) = [l_g * m_r](\alpha_j, \tau) + \rho_2[\tau\dot{\gamma}^0_r(\alpha_j) + \gamma^0_r(\alpha_j)];$$

$$\psi^t_r(\alpha_j, \tau) = [l_t * W^t_j](\alpha_j, \tau) + S^0_j(\alpha_j); \quad l_g(\tau) = \tau; \quad l_t(\tau) = 1.$$

В справедливости теоремы можно убедиться непосредственной проверкой.

Таким образом, смешанная краевая задача термоупругости анизотропных оболочек (1) — (11) сведена к решению уравнений (12), (13), (3) — (5) при граничных условиях (8) — (11).

2. Вариационный принцип. Функционал J, определяемый соотношением

$$J = \iint_G l_g * \Big\{U(\varepsilon, S_j) - N_{ij} * [\varepsilon_{ij} - \nabla_{ij}(u)] - Q_j * [\varepsilon_{j3} - \nabla_{j3}(u, \gamma_j)] -$$

$$- M_{ij} * [\varkappa_{ij} - \nabla_{ij}(\gamma)] - M_{i3} * [\varkappa_{i3} - \nabla_{j3}(\gamma_3)] - N_{33} * (\varepsilon_{33} - \gamma_3) +$$

$$+ \sum_{i,j,k}^2 \frac{2h}{(2k-1)T_0}\left[T_k * (\psi^t_k - T_0S_k) + l_t * H^{(k)}_i * \left(\frac{1}{2\lambda_{ij}}H^{(k)}_j + A_i^{-1}T_{k,i}\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{T_0} l_t * \left[H^{(1)}_3 * \left(\frac{h}{\lambda_{33}}H^{(1)}_3 + 2T_2\right) + q^+ * \left(\frac{q^+}{2\alpha^+_z} + t^+_c\right) + q^- * \left(\frac{q^-}{2\alpha^-_z} + t^-_c\right) -\right.$$

$$\left.\left. - T_1 * (q^+ + q^-) + T_2 * (q^+ - q^-)\right]\right\} dG + \iint_G \left[\frac{1}{2}\rho_1\left(u_r * u_r + \frac{h^2}{3}\gamma_r * \gamma_r\right) -\right.$$

$$\left. - (\psi^q_r * u_r + \psi^m_r * \gamma_r)\right] dG - \int_{g_u} l_g * [(u_j - \bar{u}_j) * N_j + (u_3 - \bar{u}_3) * Q +$$

$$+ (\gamma_j - \bar{\gamma}_j) * M_j + (\gamma_3 - \bar{\gamma}_3) * M_3]\, dg - \int_{g_N} l_g * [\bar{N}_j * u_j + \bar{Q} * u_3 + \bar{M}_j * \gamma_j +$$

$$+ \overline{M}_3 * \gamma_3]\, dg + \sum_k^2 \frac{2h}{(2k-1)T_0}\, l_g * l_t * \left\{ \int_{g_s} \left(\frac{1}{2\alpha_g} H_n^{(k)} + T_k^c \right) * H_n^{(k)} dg + \right.$$

$$\left. + \int_{g_T} H_n^{(k)} * \overline{T}_k dg - \int H_n^{(k)} * T_k dg \right\}, \qquad (14)$$

где $U\,(\varepsilon,\ S_j)$ — записанная через интегралы свертки удельная внутренняя энергия анизотропной оболочки, принимает стационарное значение

$$\delta J = 0 \qquad (15)$$

тогда и только тогда, если функции u_r, γ_r, N, ε, T_j, S_j, $H_r^{(j)}$ представляют собой решение краевой задачи взаимосвязанной термоупругости анизотропных оболочек с заданными начальными условиями.

Для доказательства принципа необходимо проварьировать выражение (14) по всем функциональным аргументам.

3. **Теорема взаимности**. Выведем данную теорему из вариационного принципа (15). Для этого используем тот факт, что истинное движение оболочки при произвольном выборе вариаций δu_r, $\delta\gamma_r$, $\delta\varepsilon$, δN, δT_j, δS_j, $\delta H_r^{(j)}$, $\delta q^{\pm}$ сообщает функционалу (14) стационарное значение. Обозначая $\delta u_r = u_r'$, $\delta\gamma_r = \gamma_r'$, ... и используя формулу Грина, записываем выражение для δJ в виде

$$-\delta J = \iint_G l_q * \left\{ [\varepsilon_{ij}' - \nabla_{ij}(u')] * N_{ij} + \cdots + [\varkappa_{i3}' - \nabla_{i3}(\gamma_3')] * M_{i3} + \right.$$

$$+ [N_{ji}' - (\widetilde{B}_{ijkl}^{(0)}\varepsilon_{kl}' + \widetilde{B}_{ijkl}^{(1)}\varkappa_{kl}' + \widetilde{B}_{ij33}^{(0)}\varepsilon_{33}' - 2h\widetilde{\beta}_{ji}S_1')] * \varepsilon_{ji} + \cdots +$$

$$+ [M_{i3}' - (B_{i3k3}^{(1)}\varepsilon_{k3}' + B_{i3k3}^{(2)}\varkappa_{k3}')] * \varkappa_{i3} + \sum_{i,j,k}^{2} \frac{2h}{2k-1} \left\langle \left[T_k' - \frac{T_0}{c_\varepsilon}(S_k' - (2-k)\times \right.\right.$$

$$\left. \times (\beta_{ij}\varepsilon_{ij}' + \beta_{33}\varepsilon_{33}') + (k-1)h\beta_{ij}\varkappa_{ij}') \right] * S_k + \left[S_k' + \frac{1}{T_0} l_t * \left[(A_1A_2)^{-1} \times \right.\right.$$

$$\times (A_{3-i}H_i'^{(k)})_{,i} + \frac{2k-1}{2h}\left\{ (\mu_{3-i}(k-1) + (2-k)\mu_i)\frac{2\lambda_{33}}{h}(T_i' - t_i'^c) - \right.$$

$$\left.\left.\left. - 2(k-1)H_3'^{(k)} \right\}\right]\right] * T_k - \frac{1}{T_0}\psi_k^t * T_k' - \frac{1}{T_0} l_t * (\lambda_{ii}^{-1}H_i'^{(k)} +$$

$$\left. + A_i^{-1}T_{k,i}') * H_i^{(k)} \right\rangle - \frac{1}{T_0} l_t * \left[2h\left(\lambda_{33}^{-1}H_3'^{(1)} + \frac{T_2'}{h}\right) * H_3^{(1)} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{2\lambda_{33}}{h}(\mu_{3-i}t_i^c * T_2' + \mu_i t_i^c * T_1' - \mu_{3-i}t_i'^c * T_2 - \mu_i t_i'^c * T_1) \right]\right\} dG +$$

$$+ \iint_G \{ [l_g * L_r^q(N') - \rho_1 u_r'] * u_r + [l_g * L_r^m(N') - \rho_2\gamma_r'] * \gamma_r + \psi_r^q * u_r' +$$

$$+ \psi_r^m * \gamma_r' \}\, dG + \int_{g_u} l_g * \left[N_j * u_j' + \cdots + M_3 * \gamma_3' - (N_j' * \overline{u}_j + \cdots + \right.$$

$$+ M_3' * \overline{\gamma}_3)\, dg - \sum_k^2 \frac{2h}{(2k-1)T_0}\, l_g * l_t * \left\{ \int_{g_s} \left[T_k^c * H_n'^{(k)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{H_n'^{(k)}}{\alpha_g} - T_k' \right) * H_n^{(k)} \right] dg + \int_{g_T} (\overline{T}_k * H_n'^{(k)} - T_k' * H_n^{(k)})\, dg \right\} -$$

$$- \int_{g_N} l_g * [u_j * N_j' + \cdots + \gamma_3 * M_3' - (\overline{N}_j * u_j' + \cdots + \overline{M}_3 * \gamma_3')]\, dg. \qquad (16)$$

Если допустить, что функции $u_r', \gamma_r', \ldots$ суть решения задачи теории оболочек при силовых и термических нагрузках, а также соответствующих граничных и начальных условиях (эти величины обозначены штрихами), то из условия (15) и выражения (16) получаем теорему взаимности

$$
\begin{aligned}
&\iint_G \Big\{\psi_r^q * u_r' + \psi_r^m * \gamma_r' + \frac{1}{T_0} l_g * \Big[\sum_k^2 \frac{2h}{2k-1} \psi_k'^t * T_k + \frac{2\lambda_{33}}{h} * l_t * \\
&* (\mu_{3-i} t_i'^c * T_2 + \mu_i t_i'^c * T_1)\Big]\Big\} dG + \int_{g_u} l_g * (N_i * \bar{u}_i' + \cdots + M_3 * \bar{\gamma}_3') \, dg + \\
&+ \int_{g_N} l_g * (\bar{N}_j * u_i' + \cdots + \bar{M}_3 * \gamma_3') \, dg + \sum_k^2 \frac{2h}{(2k-1) T_0} l_g * l_t * \\
&* \Big\{\int_{g_T} (\bar{T}_k' * H_n^{(k)}) \, dg + \int_{g_S} (T_k'^c * H_n^{(k)}) \, dg\Big\} = \iint_G \Big\{\psi_r'^q * u_r + \psi_r'^m * \gamma_r + \frac{1}{T_0} l_g * \\
&* \Big[\sum_k^2 \frac{2h}{2k-1} \psi_k^t * T_k' + \frac{2\lambda_{33}}{h} * l_t * (\mu_{3-i} t_i^c * T_2' + \mu_i t_i^c * T_1')\Big]\Big\} dG + \\
&+ \int_{g_u} l_g * (N_j' * \bar{u}_i + \cdots + M_3 * \bar{\gamma}_3) \, dg + \int_{g_N} l_g * (\bar{N}_i' * u_j + \cdots + \\
&+ \bar{M}_3' * \gamma_3) \, dg + \sum_k^2 \frac{2h}{(2k-1) T_0} l_g * l_t * \Big\{\int_{g_T} (\bar{T}_k * H_n'^{(k)}) \, dg + \int_{g_S} (T_k^c * H_n'^{(k)}) \, dg\Big\}.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Отметим, что (17) включает неоднородные начальные условия, а также смешанные механические и термические условия на краю оболочки.

4. Обобщение метода Майзеля. Рассмотрим ограниченную оболочку под действием произвольной внешней силовой нагрузки, q_r, m_r и тепловых источников W_i^t. Поверхности $z = \pm h$ оболочки нагреваются по закону Ньютона внешней средой с температурой t^c. Пусть на контуре оболочки заданы обобщенные перемещения $\bar{u}_r$, $\bar{\gamma}_r$ и температура T_t. Начальные условия примем однородными. Для получения решения сформулированной задачи используем теорему взаимности (17).

Пусть $u_r^{(f)}$, $\gamma_r^{(f)}$, $T_i^{(f)}$ — обобщенные перемещения и температура анизотропной оболочки, обусловленные при однородных граничных и начальных условиях единичной нагрузкой

$$
q_r' = (A_1 A_2)^{-1} \delta(\alpha_j - \xi_j) \, \delta(\tau) \, \delta_r^f, \tag{18}
$$

приложенной в точке ($\xi_j = \xi_1, \xi_2$) и направленной по оси x_f ($f = 1, 2, 3$; $x_j = \alpha_j$; $x_3 = z$). Тогда на основании теоремы взаимности (17) и выражения (18) находим

$$
\begin{aligned}
u_f(\xi_j, \tau) = &\iint_G (q_r * u_r^{(f)} + m_r * \gamma_r^{(f)}) \, dG - \iint_G \Big[\sum_k^2 \frac{2h}{(2k-1) T_0} l_t * W_k^t * T_k^{(f)} - \\
&- \frac{2\lambda_{33}}{h T_0} l_t * (\mu_i t_i^c * T_1^{(f)} + \mu_{3-i} t_i^c * T_2^{(f)})\Big] dG - \int_g (N_i^{(f)} * \bar{u}_i + \cdots + \\
&+ M_3^{(f)} * \bar{\gamma}_3) \, dg - \int_g \sum_k^2 \frac{2h}{(2k-1) T_0} l_t * \bar{T}_k * H_n^{(f)(k)} dg.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Для определения температуры T_k в качестве штрихованной системы примем действие лишь сосредоточенного мгновенного теплового источника

$$W_k^{\prime l} = (2k-1)(A_1 A_2)^{-1} \delta(\alpha_j - n_j)\, \delta(\tau) \tag{20}$$

в точке $(\eta_j = \eta_1^j, \eta_2)$. Решение исходной системы при действии термической нагрузки (20) и однородных граничных и начальных условиях обозначим $u_r^{(k)}$, $\gamma_r^{(k)}$, $T_l^{(k)}$. Тогда получим

$$T_k(\eta_j, \tau) = \iint_G \left[\sum_l^2 \frac{W_l^l * T_l^{(k)}}{2l-1} + \frac{\lambda_{33}}{h^2} (\mu_i t_i^c * T_1^{(k)} + \mu_{3-i} t_i^c * T_2^{(k)}) \right] dG - $$
$$- \frac{T_0}{2h} \iint_G (q_r * \dot{u}_r^{(k)} + m_r * \dot{\gamma}_r^{(k)})\, dG + \frac{T_0}{2h} \int_g (\dot{N}_j^{(k)} * \bar{u}_j + \cdots + $$
$$+ \dot{M}_3^{(k)} * \bar{\gamma}_3)\, dg + \int_g \sum_l^2 \frac{\bar{T}_l * H_n^{(k)(l)}}{2l-1}\, dg. \tag{21}$$

Соотношения (19), (21) учитывают влияние различных факторов, вызывающих поле температуры и перемещений, и могут упрощаться.

1. *Айнола Л. А.* Вариационные принципы и теорема взаимности для динамических задач теории оболочек.— В кн.: Тр. VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. М. : Наука, 1966, с. 9—13.
2. *Абовский И. Н., Андреев Н. П., Деруга А. П.* Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек.— М. : Наука, 1978.— 287 с.
3. *Болотин В. В.* О вариационных принципах теории упругой устойчивости.— В кн.: Проблемы механики твердого деформированного тела. М., 1970, с. 83—88.
4. *Новичков Ю. Н.* Вариационные принципы динамики и устойчивости многослойных оболочек.— Тр. Моск. энергет. ин-та. 1973, вып. 164, с. 14—22.
5. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек.— Киев : Наук. думка, 1978.— 343 с.
6. *Швец Р. Н., Флячок В. М.* Основные уравнения термоупругих ортотропных оболочек с учетом поперечных сдвиговых и нормальных деформаций.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1976, № 6, с. 540—545.
7. *Швец Р. Н., Флячок В. М.* Некоторые теоремы теории термоупругости анизотропных оболочек.— Докл. АН УССР. Сер., А, 1977, № 6, с. 527—532.
8. *Nickell R. E., Sackman I.* Variational principles for linear coupled thermoelasticity.— Quart. Appl. Math., 1968, 26, N 1, p. 540—545.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
24.01.79

УДК 539.63

П. П. Доманский

ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ ПРИ УДАРНОЙ СИЛОВОЙ НАГРУЗКЕ

Пусть тонкостенная круговая цилиндрическая оболочка радиуса R, толщины $2h$, длины a в момент времени $\tau = 0$ подвергается воздействию ударной осесимметричной нормальной силовой нагрузки $P = P(\alpha)$ и равномерно распределенных по краям $\alpha = 0$, $\frac{a}{R}$ изгибающих моментов интенсивности M_{10} и M_{20} соответственно, которые для $\tau > 0$ поддерживаются неизменными во времени. Здесь $\alpha = \frac{x}{R}$; x — осевая координата. Ставим задачу об определении такого распределения нагрузки $P = P(\alpha)$ и интенсивности изгибающих моментов M_{10} и M_{20}, при которых динамические эффекты в оболочке оптимально низки. Уравнения движения цилиндрической оболочки в перемещениях имеют вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \nu \frac{\partial w}{\partial \alpha} - c_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0,$$
$$c_1^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + w + \nu \frac{\partial u}{\partial \alpha} + c_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = P_1(\alpha) S(\tau). \tag{1}$$