

В частности, когда на поверхностях трещины кроме внешних усилий задана температура таким образом, что $T^+ = T^- = T$, то $\gamma = 0$ [2, 3] и

$$P_j(x) = \frac{1-\nu}{G} N_j(x) - \alpha_0 \delta_{j3} T(x), \quad \alpha_0 = \alpha_t (1 + \nu).$$

Когда имеется термоизолированная трещина, а тело с трещиной находится под действием теплового потока $q(x)$ перпендикулярного к плоскости расположения трещины, то $\mu = 0$ [2], а

$$P_j(x) = \frac{1-\nu}{G} N_j(x) + \alpha_0 (1 - \delta_{j3}) \frac{1}{2\pi} \left[\iint_S \frac{(x_j - \xi_j) q(\xi)}{|x - \xi|^2} d\xi_1 d\xi_2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi^2} \iint_{S^*} \frac{x_j - \xi_j}{|x - \xi|^2} \left(\frac{1}{\sqrt{\xi_1}} \iint_S \frac{\sqrt{-u_1} q(u)}{|u - \xi|^2} du_1 du_2 \right) d\xi_1 d\xi_2 \right].$$

При отсутствии тепловых нагрузок формулы (12) совпадают с полученными в [5, 6] методами интегральных преобразований в теории упругости.

1. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки.— М.: Наука, 1978.— 296 с.
2. Кит Г. С., Хай М. В. Интегральные уравнения пространственных задач теплопроводности для тел с трещинами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 8, с. 704—707.
3. Кит Г. С., Хай М. В. Интегральные уравнения пространственных задач термоупругости для тел с трещинами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 12, с. 1108—1112.
4. Леонов М. Я. Решение одного интегрального уравнения теории ньютоновского потенциала.— Укр. мат. журн., 1953, 5, № 1, с. 50—58.
5. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости.— Л.: Наука, 1967.— 402 с.
6. Hartranft R. J., Sih G. C. Three — dimensional growth characteristics of a plane crack subjected to concentrated forces.— J. Appl. Mech., 1974, 41, N 3, p. 808—809.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
19.11.79

УДК 539.377

М. Г. Кривцун, Н. Д. Грилицкий

ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛОСКОСТИ С НАГРЕВАЕМОЙ КОНТАКТИРУЮЩЕЙ ТРЕЩИНОЙ

Рассмотрим упругую изотропную плоскость комплексной переменной $z = x + iy$ с разрезом вдоль отрезка $[-l, l]$ оси Ox . Определим напряженное состояние такой плоскости, обусловленное стационарным температурным полем $T(x, y)$ и внешней силовой нагрузкой.

Задача теплопроводности. Пусть на берегах трещины задана температура

$$T^\pm = f^\pm(x), \quad x \in [-l, l]. \quad (1)$$

Температурное поле ищем в виде [3]

$$T(x, y) = 2 \operatorname{Re} F(z), \quad F(z) = F_0(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l \frac{\gamma(\tau) d\tau}{\tau - z} + \frac{C}{2}. \quad (2)$$

Здесь $F_0(z)$ — комплексный потенциал температурного поля в сплошной плоскости; C — действительная постоянная; $\gamma(\varepsilon) = \gamma_1(\tau) + i\gamma_2(\tau)$ — неизвестная функция. Действительная часть ее $\gamma_1(\tau) = \frac{1}{2}[f^+(\tau) - f^-(\tau)]$, а функция $\gamma_2(\tau)$ определяется из сингулярного интегрального уравнения

$$\frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{\gamma_2(\tau) d\tau}{\tau - x} = f_2(x) - C, \quad x \in [-l, l], \quad (3)$$

где $f_2(x) = \frac{1}{2}[f^+(x) + f^-(x)] - 2 \operatorname{Re} F_0(x)$.

Действительная постоянная C определяется из условия существования ограниченного на концах разреза решения уравнения (3):

$$C = -\frac{1}{\pi i} \int_{-l}^l \frac{f_2(x) dx}{R^+(x)}, \quad R(z) = \sqrt{z^2 - l^2}, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} z^{-1} R(z) = 1,$$

а само решение по формуле обращения интеграла типа Коши

$$\gamma_2(x) = -\frac{R^+(x)}{\pi} \int_{-l}^l \frac{f_2(\tau) d\tau}{R^+(\tau)(\tau - x)}. \quad (4)$$

Задача термоупругости. Пусть на берегах трещины заданы напряжения

$$(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^\pm = \rho^\pm(x), \quad x \in [-l, l]. \quad (5)$$

Предположим, что в процессе деформации берега трещины приходят в гладкий контакт вдоль совокупности отрезков $L = \bigcup_{k=1}^n [c_k, d_k]$. Комплексные потенциалы Колосова — Мухелишвили ищем в виде [4]

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi_0(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l \frac{\mu(\tau) d\tau}{\tau - z}, \\ \Psi(z) &= \Psi_0(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l \left[\frac{\overline{\rho(\tau)} - \overline{\mu(\tau)}}{\tau - z} - \frac{\tau \mu(\tau)}{(\tau - z)^2} \right] d\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

где $\Phi_0(z)$; $\Psi_0(z)$ — комплексные потенциалы, обусловленные основным температурным полем $T_0(x, y) = 2 \operatorname{Re} F_0(z)$ и внешней нагрузкой в сплошной плоскости:

$$\rho(x) = 2\rho_1(x); \quad \mu(x) = \rho_1(x) + \mu_1(x); \quad \rho_1(x) = \frac{1}{2} [\rho^+(x) - \rho^-(x)].$$

Неизвестная функция $\mu_1(x)$, выражающаяся через производную от скачка смещений берегов трещины следующим образом (в обозначениях работы [2]):

$$\mu_1(x) = \frac{2G}{1+\kappa} \frac{d}{dx} [(u + iv)^+ - (u + iv)^-] - H\gamma(x) + \kappa_1 \rho_1(x), \quad \kappa_1 = \frac{1-\kappa}{1+\kappa}, \quad (7)$$

определяется из сингулярного интегрального уравнения

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-l}^l \frac{\mu_1(\tau) d\tau}{\tau - x} = \rho_2^*(x), \quad x \in [-l, l], \quad (8)$$

где $\rho_2^*(x) = \rho_2(x) + \sigma_{yy}^*(x)$; $\rho_2(x) = \frac{1}{2} [\rho^+(x) + \rho^-(x)] - (\sigma_{yy}^0 - i\sigma_{xy}^0)$;

σ_{yy}^0 , σ_{xy}^0 — напряжения, обусловленные функциями $\Phi_0(z)$, $\Psi_0(z)$; $\sigma_{yy}^*(x)$ — дополнительные нормальные напряжения, обусловленные контактом берегов трещины:

$$\sigma_{yy}^*(x) = \begin{cases} -\rho(x), & x \in L, \\ 0, & x \in L' = [-l, l] \setminus L. \end{cases}$$

Решение уравнения (8) должно удовлетворять условию неразрывности смещений в вершинах трещины, которое с учетом соотношения (7) запишется так:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \mu_1(\tau) d\tau = \kappa_1 \frac{X - iY}{2\pi i} - iH\Gamma, \quad \Gamma = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \gamma(x) dx, \quad (9)$$

где $X - iY = 2i \int_{-l}^l p_1(x) dx$ — главный вектор внешних усилий, заданных на берегах трещины. Неограниченное на концах разреза решение уравнения (8), удовлетворяющее условию (9), имеет вид

$$\begin{aligned} \mu_1(x) &= -\frac{1}{R^+(x)} [\mu_1^0(x) + \mu_1^*(x)], \quad \mu_1^*(x) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{R^+(\tau) p_*(\tau) d\tau}{\tau - x}, \\ \mu_1^0(x) &= -\kappa_1 \frac{X - iY}{2\pi} - H\Gamma - \frac{1}{\pi i} \int_{-l}^l \frac{R^+(\tau) p_2(\tau) d\tau}{\tau - x}. \end{aligned} \quad (10)$$

Отметим, что функция $\mu_{10}(x) = -\mu_1^0(x)/R^+(x)$ представляет собой общее решение интегрального уравнения задачи термоупругости в постановке, не учитывающей контакт берегов трещины. Требуя, чтобы производная от скачка нормальных смещений на участках контакта берегов трещины равнялась нулю, на основании соотношений (7), (10) для определения неизвестных напряжений $p_*(x)$ получаем сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{R^+(\tau) p_*(\tau) d\tau}{\tau - x} = \psi(x), \quad x \in L, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{\kappa_1 X}{2\pi} + HCx - i\kappa_1 p_{12}(x) R^+(x) + \\ &+ \frac{1}{\pi i} \int_{-l}^l \frac{[p_{21}(\tau) + Hf_2(\tau)] R^+(\tau) d\tau}{\tau - x}; \quad p_j(x) = p_{j1}(x) + ip_{j2}(x), \quad j = \overline{1, 2}. \end{aligned}$$

Исходя из физической сущности функции $p_*(x)$ заключаем, что решение уравнения (11) должно быть ограниченным на концах участков контакта:

$$p_*(x) = \frac{R_n^+(x)}{R^+(x)} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\psi(\tau) d\tau}{R_n^+(\tau) (\tau - x)}.$$

Здесь $R_n(z) = \prod_{k=1}^n \sqrt{(z - c_k)(z - d_k)}$; $\lim_{z \rightarrow \infty} z^{-n} R(z) = 1$.

Из теории сингулярных интегральных уравнений известно, что ограниченное на концах решение уравнения (11) существует только тогда, когда его правая часть удовлетворяет условиям

$$\frac{1}{\pi} \int_L \frac{x^k \psi(x) dx}{R_n^+(x)} = 0, \quad k = \overline{1, n-1}. \quad (12)$$

Соотношения (12) вместе с условиями неразрывности нормальных смещений на концах нескачковавшихся участков

$$\int_{d_k}^{c_k} [\operatorname{Im} \{\mu_1(x)\} + H\gamma_2(x) - \kappa_1 p_{12}(x)] dx = 0, \quad k = \overline{0, n}, \quad d_0 \equiv -l, \quad c_{n+1} \equiv l \quad (13)$$

образуют систему условий для определения $2n$ неизвестных постоянных c_k, d_k ($k = \overline{1, n}$). Так как скачок нормальных смещений на скачковавшихся участках трещины равен нулю, а условие неразрывности смещений в вершинах трещины использовано при решении уравнения (8), то среди условий (13) независимых будет n . Поэтому одно из этих условий при составлении уравнений для определения зон контакта необходимо опустить.

Зная функцию $\mu_1(x)$, коэффициенты интенсивности напряжений определим по формуле, полученной аналогично работе [2]:

$$k_1^\pm - ik_2^\pm = \pm i \lim_{x \rightarrow \pm l} \sqrt{2\pi|x \mp l|} \mu_1(x). \quad (14)$$

Подставляя сюда соотношение (10), находим

$$k_1^\pm - ik_2^\pm = k_{1*}^\pm + k_{10}^\pm - ik_{20}^\pm, \quad k_{1*}^\pm = \frac{i}{\sqrt{\pi l}} \int_L^l \frac{(l \pm x) p_*(x) dx}{R^+(x)},$$

$$k_{10}^\pm - ik_{20}^\pm = \sqrt{\frac{\pi}{l}} \left[\pm H\Gamma \pm \kappa_1 \frac{X - iY}{2\pi} + \frac{1}{\pi i} \int_{-l}^l \frac{(l \pm x) p_2(x) dx}{R^+(x)} \right]. \quad (15)$$

Здесь k_{1*}^\pm — дополнительная составляющая коэффициента интенсивности нормальных напряжений, обусловленная контактом берегов трещины. При отсутствии контакта и температурных членов ($\Gamma = 0$) формула (15) совпадает с известной в литературе [5].

Следует отметить качественное отличие решений, получаемых с учетом и без учета контакта берегов трещины. Так как $p_*(x) \geq 0$ на L , то подынтегральная функция в формуле для k_{1*}^\pm положительная, а следовательно, $k_{1*}^\pm > 0$. Поэтому можно утверждать, что при учете контакта берегов трещины коэффициенты интенсивности нормальных напряжений будут выше, чем их значение без учета контакта. При отсутствии контакта интенсивность напряжений зависит не от характера распределения на трещине несаморавновешенных напряжений $p_1(x)$, а лишь от главного вектора этих напряжений. Точно также при отсутствии контакта на величину интенсивности напряжений влияет не характер распределения плотности температурного поля $\gamma(x)$, а лишь суммарная характеристика Γ . Эта постоянная в нашем случае будет такой:

$$\Gamma = \Gamma_1 + i\Gamma_2 = \frac{1}{\pi i} \int_{-l}^l \left[f_1(x) + \frac{x f_2(x)}{R^+(x)} \right] dx. \quad (16)$$

Из соотношений (15), (16) видно, что при решении задачи без учета контакта берегов трещины четная часть функции $f_2(x)$ на интенсивность напряжений не влияет.

В качестве примера исследуем подробнее случай одной зоны контакта ($n = 1$). После изменения порядка интегрирования и вычисления внутренних интегралов условие (12) и функцию $\mu_1^*(x)$ можно представить непосредственно через заданную на трещине нагрузку следующим образом:

$$H\Gamma_1 + \frac{\kappa_1 X}{2\pi} - \frac{\kappa_1}{\pi} \int_{c_1}^{d_1} p_{12}(x) X_1(x) dx + \frac{H}{\pi i} \int_{-l}^l \frac{f_2(x)(x + \varepsilon_1) dx}{R^+(x)} +$$

$$+ \frac{1}{\pi i} \int_{L'} f(x) X_1^+(x) dx = 0, \quad \varepsilon_1 = \frac{d_1 + c_1}{2}, \quad (17)$$

$$\mu_1^*(x) = \frac{\kappa_1 X}{2\pi} + HC[x - R_1(x)] + \frac{1}{\pi i} \int_{-l}^l \frac{R^+(\tau) f(\tau) d\tau}{\tau - x} -$$

$$- \frac{R_*(x)}{\pi i} \int_{L'} \frac{X_1^+(\tau) f(\tau) d\tau}{\tau - x}, \quad x \in L',$$

где $f(x) = p_{12}(x) + Hf_2(x)$, $X_1(z) = \frac{R(z)}{R_1(z)}$.

В частности, если на берегах трещины заданы

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^{\pm} &= p_{21}(x) = p_0 \left(a_0 + \frac{a_1 x}{l} + \frac{a_2 x^2}{l^2} \right), \\ T^{\pm} &= f_2(x) = T_0 \left(b_0 + \frac{b_1 x}{l} + \frac{b_2 x^2}{l^2} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

то условие (17) принимает вид

$$c_* \varepsilon + c_1 \omega + c_2 \varepsilon (\omega + \delta^2) = 0.$$

Здесь

$$\begin{aligned} c_* &= p_0 a_0 - \frac{HT_0 b_2}{2}; \quad c_k = p_0 a_k + HT_0 b_k, \quad k = \overline{1, 2}; \\ \omega &= \varepsilon^2 + \frac{\delta^2 - 1}{2}; \quad \varepsilon = \frac{d+c}{2}; \quad \delta = \frac{d-c}{2}; \quad d_1 = ld; \quad c_1 = lc. \end{aligned}$$

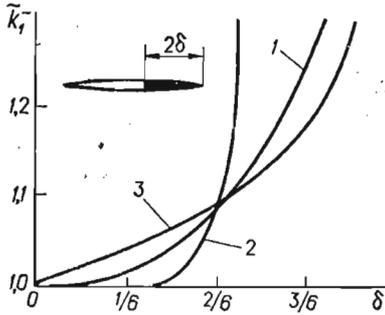


Рис. 1

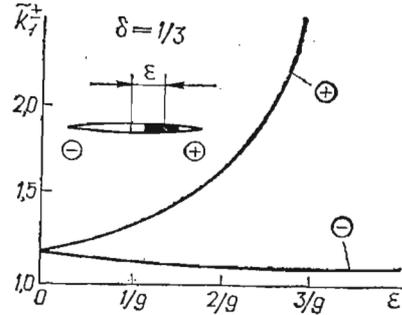


Рис. 2

Функции $\mu_{10}(x)$ и $\mu_1(x)$ в случае нагрузки (18) с учетом замены $x = ls$ определяются формулами

$$\mu_{10}(s) = \frac{l}{\sqrt{1-s^2}} \left\{ \frac{HT_0 b_1}{2} + p_0 \left[a_0 s + \frac{s_1}{2} (a_1 + sa_2) \right] \right\}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mu_1(s) &= \frac{l}{\sqrt{1-s^2}} \{ HT_0 (b_1 + b_2 s) (1 - s^2) + R_*(s) [c_* + c_1 (\varepsilon + s) + \\ &+ c_2 (\omega + s^2 + \varepsilon s)] \}, \end{aligned}$$

$$s \in [-1, c] \cup [d, 1], \quad R_*(\xi) = \sqrt{(\xi - c)(\xi - d)}, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi^{-1} R_*(\xi) = 1.$$

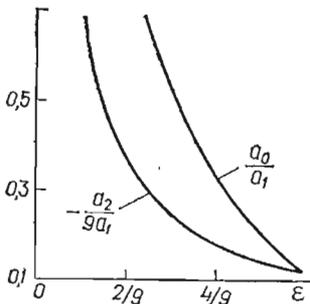


Рис. 3

Из соотношений (14), (19) находим

$$k_{10}^{\pm} = \mp \sqrt{\pi l} \left\{ \frac{HT_0 b_1}{2} + p_0 \left[\frac{a_1}{2} \pm \left(a_0 + \frac{a_2}{2} \right) \right] \right\}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} k_1^{\pm} &= -\sqrt{\pi l [(\varepsilon \mp 1)^2 - \delta^2]} [c_* + c_1 (\varepsilon \pm 1) + \\ &+ c_2 (\omega + 1 \pm \varepsilon)], \end{aligned}$$

где k_{10}^{\pm} — значение k_1^{\pm} без учета контакта.

На рис. 1 приведены вычисленные по формулам (20) зависимости приведенных коэффициентов интенсивности нормальных напряжений $\bar{k}_1^- =$

$= k_1^- / k_{10}^-$ от безразмерного параметра δ для случаев нагрузки $a_2 = b_k = 0$ (кривая 1), $a_0 = b_k = 0$ (кривая 2) и $a_k = 0$ (кривая 3), при которых контакт происходит в правой вершине трещины. Как видно из приведенных графиков, для несимметричных линейных нагрузок $f_2(s) = T_0 b_1 s$ и $p_{21}(s) = p_0 a_1 s$ значения $\delta = \frac{1}{3}$ и $\bar{k}_1^- = 1,08866$ не зависят от абсолютных величин параметров a_1 и b_1 . Аналогичный результат имеет место при изгибе полосы с поперечной трещиной [6]

Зависимость \tilde{k}_1^\pm от параметра ϵ при фиксированной ширине зоны контакта ($\delta = \frac{1}{3}$) приведена на рис. 2. При $\epsilon = 0$ величина \tilde{k}_1^- совпадает с его значением, полученным несколько другим путем в работе [1]. Следует отметить, что существуют единственные значения параметров $a_2 = -a_1$ и $a_0 = a_1/9$, которые не влияют на ширину зоны контакта ($\delta = \frac{1}{3}$), достигаемую с помощью параметра a_1 (рис. 3). При этом величина $\tilde{k}_1^- = 1,01497$ в отличие от случая $a_0 = a_2 = 0$, когда $\tilde{k}_1^- = 1,08866$. Это позволяет сделать вывод о том, что интенсивность напряжений в вершинах контактирующей трещины существенно зависит не только от ширины зоны контакта, но и от характера нагружения, при котором она достигается.

1. Грилицкий Н. Д., Кит Г. С. О напряженном состоянии в окрестности трещины с частично контактирующими берегами.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 8, с. 35—39.
2. Кит Г. С., Кривцун М. Г. Интегральные уравнения задачи термоупругости для плоскости с криволинейным отверстием и трещинами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1976, № 11, с. 997—1001.
3. Кит Г. С., Кривцун М. Г. Интегральные уравнения стационарных задач теплопроводности для тел с криволинейными разрезами.— Инж.-физ. журн., 1978, 34, № 1, с. 149—150.
4. Кит Г. С., Кривцун М. Г. Смешанная задача термоупругости для плоскости с криволинейными разрезами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 3, с. 227—230.
5. Разрушение.— М.: Мир, 1975.— Т. 2.— 364 с.
6. Bowie O. L., Freese C. E. A note on the bending of a cracked strip including crack surface interference.— Int. J. Fract., 1976, 12, N 3, p. 457—462.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
15.12.79

УДК 539.377

И. П. Лаушник

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ТЕРМОИЗОЛИРОВАННЫХ ТРЕЩИН В БЕСКОНЕЧНОМ ТЕЛЕ

Пусть упругое бесконечное тело, ослабленное N плоскими произвольно расположенными термоизолированными эллиптическими трещинами (разрезами) S_n ($n = \bar{1}, N$), находится под действием теплового потока $q(x_1, x_2, x_3)$ и заданных на поверхностях трещин внешних усилий N_{in} (N_{3n} — нормальные, N_{1n} и N_{2n} — касательные внешние усилия). Если выбрать локальные системы координат $O_n x_{1n} x_{2n} x_{3n}$ таким образом, что плоскость $x_{1n} O_n x_{2n}$ совпадает с плоскостью расположения n -й трещины, то задача об определении в теле с трещинами температурного поля и напряжений сводится к решению системы интегро-дифференциальных уравнений [1, 4]

$$\Delta_n \iint_{S_n} \frac{\gamma_n(\xi, \eta)}{R_{0n}} d\xi d\eta = q_n(x_{1n}, x_{2n}) + \sum_{k=1}^N \iint_{S_k} \gamma_k(\xi, \eta) S_{kn}(x_{1n}, x_{2n}, \xi, \eta) d\xi d\eta,$$

$$\Delta_n \iint_{S_n} \frac{\alpha_{in}(\xi, \eta)}{R_{0n}} d\xi d\eta + (-1)^i (1 - \delta_{i3}) \nu \frac{\partial}{\partial x_{(3-i)n}} \iint_{S_n} \left[\alpha_{in}(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial x_{2n}} - \right. \\ \left. - \alpha_{2n}(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial x_{1n}} \right] \frac{d\xi d\eta}{R_{0n}} - (1 - \delta_{i3}) \alpha_0 \frac{\partial}{\partial x_{in}} \iint_{S_n} \frac{\gamma_n(\xi, \eta)}{R_{0n}} d\xi d\eta =$$