ков видно, что при сближении трещин до значения параметра $\rho = 0{,}7$ перемещения берегов трещин симметричны относительно середины трещины. При дальнейшем сближении трещин происходит раскрытие их у внутренних вершин, что в конечном счете приводит к разрыву перемычки между трещинами.

1. *Власов В. З.* Избранные труды.— М. : Изд-во АН СССР, 1962.— Т. 1. 528 с.
2. *Каландия А. И.* Замечание о креплении полуплоскости стрингером конечной длины.— В кн.: Механика деформируемых тел и конструкций. М. : Машиностроение, 1975, с. 211—215.
3. *Осадчук В. А., Подстригач Я. С.* К определению напряженного состояния в замкнутой цилиндрической оболочке и бесконечной пластинке с трещинами.— Механика твердого тела, 1973, № 3, с. 69—78.
4. *Подстригач Я. С., Осадчук В. А., Федюк Е. М., Николишин М. М.* Метод дисторсий в теории тонких оболочек с трещинами.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 1, с. 29—41.
5. *Черных К. Ф.* Линейная теория оболочек.— Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1962. — Т. 1. 274 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 19.11.79

УДК 539.377

М. В. Хай

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОГО ТЕЛА С ТРЕЩИНОЙ, КОТОРАЯ ИМЕЕТ ВИД ПОЛУПЛОСКОСТИ

Известно, что задача термоупругости для бесконечного тела с трещиной, имеющей вид полуплоскости, сводится к решению двумерных интегро-дифференциальных уравнений [3]

$$\Delta \iint_S \frac{\alpha_j(\xi)}{|x-\xi|}\, d\xi_1 d\xi_2 + (-1)^j \nu (1-\delta_{j3}) \frac{\partial}{\partial x_{3-j}} \iint_S \left[\alpha_1(\xi) \frac{\partial}{\partial x_2} - \right.$$
$$\left. - \alpha_2(\xi) \frac{\partial}{\partial x_1}\right] \frac{d\xi_1 d\xi_2}{|x-\xi|} = P_j(x), \quad x \in S, \quad j = 1,\ 2,\ 3. \tag{1}$$

Здесь $\alpha_j(\xi)$ — неизвестные функции, обращающиеся в нуль на контуре области S, которую занимает трещина; δ_{jl} — символ Кронекера; Δ — двумерный оператор Лапласа;

$$P_j(x) = \frac{1-\nu}{G} N_j(x) - \alpha_0 \left[\delta_{j3} \iint_S \frac{\mu(\xi)}{|x-\xi|}\, d\xi_1 d\xi_2 - \right.$$
$$\left. - (1-\delta_{j3}) \frac{\partial}{\partial x_j} \iint_S \frac{\gamma(\xi)}{|x-\xi|}\, d\xi_1 d\xi_2 \right], \tag{2}$$

где G, ν — модуль сдвига и коэффициент Пуассона; $N_j(x)$ — заданные на поверхностях трещины внешние усилия (N_3 — нормальные, N_1 и N_2 — сдвигающие усилия); $\mu(\xi)$, $\gamma(\xi)$ — известные функции, через которые определяется температура в теле с трещиной. В общем случае функции μ и γ определяются из интегральных уравнений задач теплопроводности [2, 4], которые решаются в замкнутом виде. Далее считаем, что область S соответствует значениям $x_1 \leqslant 0$.

Интегральное уравнение (1) при $j = 3$ решается в замкнутом виде [2]. Для решения системы уравнений (1) при $j = 1{,}2$ введем в рассмотрение функции

$$\alpha_j^-(\xi) = \begin{cases} \alpha_j(\xi), & \xi \in S, \\ 0, & \xi \in S^*, \end{cases} \quad P_j^-(x) = \begin{cases} P_j(x), & x \in S, \\ 0, & x \in S^*, \end{cases} \tag{3}$$
$$f_j^+(x) = \begin{cases} 0, & x \in S, \\ \text{неизвестная при } x \in S^*. \end{cases}$$

Здесь S^* — область, дополняющая S до полной плоскости, т. е. соответствующая значениям $x_1 \geqslant 0$. С учетом введенных обозначений интегральные уравнения преобразуем к виду

$$\Delta \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_j^-(\xi)}{|x-\xi|} d\xi_1 d\xi_2 + (-1)^j \nu (1-\delta_{j3}) \frac{\partial}{\partial x_{3-j}} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\alpha_1^-(\xi) \frac{\partial}{\partial x_2} - \right.$$

$$\left. - \alpha_2^-(\xi) \frac{\partial}{\partial x_1}\right] \frac{d\xi_1 d\xi_2}{|x-\xi|} = P_j^-(x) + f_j^+(x), \quad j = 1,\ 2,\ 3. \tag{4}$$

Система уравнений (4) имеет место для всех значений x_1 и x_2. Поэтому к ней можно применить двумерные преобразования Фурье. Воспользовавшись далее теоремой о свертках, из уравнений (4) при $j = 1,\ 2$ получим

$$\begin{gathered} -\frac{\eta_1^2 + (1-\nu)\eta_2^2}{\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}} F_1^-(\eta) - \frac{\nu\eta_1\eta_2}{\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}} F_2^-(\eta) = G_1^-(\eta) + F_1^+(\eta), \\ -\frac{\nu\eta_1\eta_2}{\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}} F_1^-(\eta) - \frac{(1-\nu)\eta_1^2 + \eta_2^2}{\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}} F_2^-(\eta) = G_2^-(\eta) + F_2^+(\eta), \end{gathered} \tag{5}$$

где $F_j^-(\eta)$, $F_j^+(\eta)$ и $G_j^-(\eta)$ — изображение по Фурье соответственно от функций $\alpha_j^-(\xi)$, $f_j^+(\xi)$ и $P_j^-(\xi)$, которое введено следующим образом:

$$F_j^-(\eta) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \alpha_j^-(\xi)\, e^{i(\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2)} d\xi_1 d\xi_2. \tag{6}$$

В выражениях (5) неизвестными являются функции $F_j^\pm(\eta)$. Эти функции обладают свойством, что если вместо переменной η_1 подставить комплексную переменную w такую, что $\eta_1 = \mathrm{Re}\, w$, то функция $F_j^-(w)$ будет аналитической в области $\mathrm{Im}\, w \leqslant 0$, а функция $F_j^+(w)$ — в области $\mathrm{Im}\, w \geqslant 0$. Поэтому систему уравнений (5) можно рассматривать как задачу Римана на прямой для системы аналитических функций. Используя результаты работы [1], где рассмотрена подобная к (5) краевая задача для системы аналитических функций, и решая систему (5), получаем

$$\begin{gathered} F_j^+(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\eta_1 + i|\eta_2|}} + [C_j(\eta_2) - K^+(G_j^-(\eta)\sqrt{\eta_1 + i|\eta_2|}^+)], \quad j = 1,\ 2, \\ F_j^-(\eta) = \frac{\sqrt{\eta_1 - i|\eta_2|}^-}{(1-\nu)|\eta|^4} \{[(1-\nu)\eta_j^2 + \eta_{3-j}^2][C_j(\eta_2) + \\ + K^-(G_j^-(\eta)\sqrt{\eta_1 + i|\eta_2|}^+)] - \nu\eta_1\eta_2[C_{3-j}(\eta_2) + \\ + K^-(G_{3-j}^-(\eta)\sqrt{\eta_1 + i|\eta_2|}^+)]\}, \quad j=1,\ 2. \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь $C_j(\eta_2)$ — произвольные функции, обусловленные тем, что детерминант системы (5) обращается в нуль при $\eta_1 = \eta_2 = 0$; $K^\pm(Z_j(\eta))$ — операторы, которые определяются так:

$$K^\pm(Z_j(\eta)) = \frac{Z_j(\eta)}{2} \pm \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{Z_j(\xi, \eta_2)}{\xi - \eta_1} d\xi. \tag{8}$$

Наличие произвольных функций $C_j(\eta_2)$ в уравнениях (7) свидетельствует о том, что уравнения (1) не имеют единственного решения. Для рассматриваемой задачи необходимо определить обращающееся в нуль на контуре области S решение. Поэтому $C_j(\eta_2)$ для рассматриваемой задачи необходимо определить так, чтобы функции $F_j^-(\eta)$ были ограничены при $\eta = 0$. Удовлетворяя этому условию, получаем

$$C_j(\eta_2) = \left\{-K^-(G_j^-(\eta)\sqrt{\eta_1 + i|\eta_2|}^+) + \frac{\nu(-1)^j}{2-\nu}(\delta_{j1} i|\eta_2| + \delta_{j2}\eta_2) \times\right.$$

$$\times \left[\frac{\partial}{\partial \eta_1} K^- (G_j^- (\eta) \sqrt{\eta_1 + i|\eta_2|}^+) + \right.$$

$$\left. + i \operatorname{sgn} \eta_2 \frac{\partial}{\partial \eta_1} K^- (G_j^- (\eta) \sqrt{\eta_1 + i|\eta_2|}^+)] \right\}_{\eta_1 = -i|\eta_2|}. \tag{9}$$

Таким образом, задача о решении системы интегральных уравнений (1) сведена к вычислению обратного преобразования от соответствующих функций. Опуская все промежуточные вычисления, находим

$$\alpha_j(x) = -\frac{1}{4\pi^2(1-\nu)} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\langle \varepsilon_j(\xi) \left[\frac{1}{|x-\xi|} - \frac{\nu (x_{3-j} - \xi_{3-j})^2}{|x-\xi|^3} \right] + \right.$$

$$\left. + \varepsilon_{3-j}(\xi) \frac{\nu (x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{|x-\xi|^3} \right\rangle d\xi_1 d\xi_2, \quad x \in S, \quad j = 1, 2, \tag{10}$$

где

$$\varepsilon_j(x) = \begin{cases} P_j(x), & x \in S, \\ f_j^+(x), & x \in S^*; \end{cases}$$

$$f_j^+(x) = -\frac{1}{\pi^2 \sqrt{x_1}} \iint\limits_S \sqrt{-\xi_1} \left\{ P_j(\xi) \left[\frac{1}{|x-\xi|^2} + \right. \right. \tag{11}$$

$$\left. + \frac{2\nu(-1)^{j+1}}{2-\nu} \frac{(x_1-\xi_1)^2 - (x_2-\xi_2)^2}{|x-\xi|^4} - \frac{2x_1}{\xi_1 |x-\xi|^2} \right] +$$

$$\left. + \frac{4\nu}{2-\nu} P_{3-j}(\xi) \frac{(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)}{|x-\xi|^4} \right\} d\xi_1 d\xi_2, \quad j = 1, 2, \quad x \in S^*.$$

Для получения решений (10), (11) из уравнений (7) необходимо воспользоваться тем, что

$$\frac{\partial}{\partial \eta_1} K^- (G_j^- (\eta) \sqrt{\eta_1 + i|\eta_2|}^+)|_{\eta_1 = -i|\eta_2|} = \frac{2}{\pi(1+i)} \int\limits_{-\infty}^{0} \sqrt{-\xi} P_j^* (\xi, \eta_2) e^{\xi|\eta_2|} d\xi.$$

Здесь $P_j^*(\xi, \eta_2)$ — изображение по Фурье от функции $P_j^-(\eta_1, \eta_2)$ лишь по переменной η_1. Формулы (10) есть формулами обращения системы интегральных уравнений (11) при $j = 1, 2$. Ими определяется нулевое на контуре области S решение.

При решении уравнений (1) нами определялись функции $f_j^+(x)$, которыми определяются напряжения в плоскости расположения трещины вне ее. Это создает большие удобства при определении коэффициентов интенсивности напряжений. Для рассматриваемой задачи термоупругости выражения для этих коэффициентов в квадратурах через заданные внешние усилия и тепловые нагрузки определяются по формулам

$$k_1 = \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi^2} \frac{G}{1-\nu} \iint\limits_S \frac{\sqrt{-\xi_1} P_3(\xi)}{|x-\xi|^2} d\xi_1 d\xi_2,$$

$$k_2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi^2} \frac{G}{1-\nu} \iint\limits_S \sqrt{-\xi_1} \left\{ P_1(\xi) \left[\frac{1}{|x-\xi|^2} + \right. \right. \tag{12}$$

$$\left. \left. + \frac{2\nu}{2-\nu} \frac{(x_1-\xi_1)^2 - (x_2-\xi_2)^2}{|x-\xi|^4} \right] + \frac{4\nu}{2-\nu} P_2(\xi) \frac{(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)}{|x-\xi|^4} \right\} d\xi_1 d\xi_2,$$

$$k_3 = \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi^2} \frac{G}{1-\nu} \iint\limits_S \sqrt{-\xi_1} \left\{ P_2(\xi) \left[\frac{1}{|x-\xi|^2} - \frac{2\nu}{2-\nu} \frac{(x_1-\xi_1)^2 - (x_2-\xi_2)^2}{|x-\xi|^4} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{4\nu}{2-\nu} P_1(\xi) \frac{(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)}{|x-\xi|^4} \right\} d\xi_1 d\xi_2,$$

где x принадлежит контуру трещины; S — область, занятая трещиной и соответствующая значениям $x_1 \leqslant 0$; $P_j(\xi)$ — известные функции, которые определяются через внешние усилия и тепловые нагрузки по формулам (2).

В частности, когда на поверхностях трещины кроме внешних усилий задана температура таким образом, что $T^+ = T^- = T$, то $\gamma = 0$ [2, 3] и

$$P_j(x) = \frac{1-\nu}{G} N_j(x) - \alpha_0 \delta_{j3} T(x), \quad \alpha_0 = \alpha_t(1+\nu).$$

Когда имеется термоизолированная трещина, а тело с трещиной находится под действием теплового потока $q(x)$ перпендикулярного к плоскости расположения трещины, то $\mu = 0$ [2], а

$$P_j(x) = \frac{1-\nu}{G} N_j(x) + \alpha_0 (1 - \delta_{j3}) \frac{1}{2\pi} \left[\iint\limits_S \frac{(x_j - \xi_j)\, q(\xi)}{|x - \xi|^2} d\xi_1 d\xi_2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{S^*} \frac{x_j - \xi_j}{|x - \xi|^2} \left(\frac{1}{\sqrt{\xi_1}} \iint\limits_S \frac{\sqrt{-u_1}\, q(u)}{|u - \xi|^2} du_1 du_2 \right) d\xi_1 d\xi_2 \right].$$

При отсутствии тепловых нагрузок формулы (12) совпадают с полученными в [5, 6] методами интегральных преобразований в теории упругости.

1. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки.— М. : Наука, 1978.— 296 с.
2. *Кит Г. С., Хай М. В.* Интегральные уравнения пространственных задач теплопроводности для тел с трещинами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 8, с. 704—707.
3. *Кит Г. С., Хай М. В.* Интегральные уравнения пространственных задач термоупругости для тел с трещинами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 12, с. 1108—1112.
4. *Леонов М. Я.* Решение одного интегрального уравнения теории ньютоновского потенциала.— Укр. мат. журн., 1953, 5, № 1, с. 50—58.
5. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости.— Л. : Наука, 1967.— 402 с.
6. *Hartranft R. J., Sih G. C.* Three — dimensional growth characterictics of a plane crack subjected to concentrated forces.— J. Appl. Mech., 1974, 41, N 3, p. 808—809.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
19.11.79

УДК 539.377

М. Г. Кривцун, Н. Д. Грилицкий

ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛОСКОСТИ С НАГРЕВАЕМОЙ КОНТАКТИРУЮЩЕЙ ТРЕЩИНОЙ

Рассмотрим упругую изотропную плоскость комплексной переменной $z = x + iy$ с разрезом вдоль отрезка $[-l, l]$ оси Ox. Определим напряженное состояние такой плоскости, обусловленное стационарным температурным полем $T(x, y)$ и внешней силовой нагрузкой.

Задача теплопроводности. Пусть на берегах трещины задана температура

$$T^\pm = f^\pm(x), \quad x \in [-l, l]. \tag{1}$$

Температурное поле ищем в виде [3]

$$T(x, y) = 2\,\mathrm{Re}\, F(z), \quad F(z) = F_0(z) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-l}^{l} \frac{\gamma(\tau)\, d\tau}{\tau - z} + \frac{C}{2}. \tag{2}$$

Здесь $F_0(z)$ — комплексный потенциал температурного поля в сплошной плоскости; C — действительная постоянная; $\gamma(\varepsilon) = \gamma_1(\tau) + i\gamma_2(\tau)$ — неизвестная функция. Действительная часть ее $\gamma_1(\tau) = \frac{1}{2}[f^+(\tau) - f^-(\tau)]$, а функция $\gamma_2(\tau)$ определяется из сингулярного интегрального уравнения

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-l}^{l} \frac{\gamma_2(\tau)\, d\tau}{\tau - x} = f_2(x) - C, \quad x \in [-l, l], \tag{3}$$

где $f_2(x) = \frac{1}{2}[f^+(x) + f^-(x)] - 2\,\mathrm{Re}\, F_0(x)$.