

4. Нетушил А. В., Жуховицкий Б. М., Кудин В. Н., Парини Е. П. Высоочастотный нагрев диэлектриков и полупроводников.— М.; Л.: Госэнергоиздат, 1959.— 480 с.
5. Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Гачкевич А. Р., Чернявская Л. В. Термоупругость электропроводных тел.— Киев: Наук. думка, 1977.— 246 с.
6. Рикенглас А. Э. К теории нагрева диэлектриков мощными электромагнитными полями.— Инж.-физ. журн., 1974, 27, № 6, с. 1061—1068.
7. Фрелих Г. Теория диэлектриков.— М.: Изд-во иностр. лит., 1960.— 251 с.
8. Хиппель А. Р. Диэлектрики и их применение.— М.; Л.: Госэнергоиздат, 1959.— 336 с.
9. Хиппель А. Р. Диэлектрики и волны.— М.: Изд-во иностр. лит., 1960.— 438 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
19.11.79

УДК 539.3

Е. М. Федюк

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ПОЛОГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С СИСТЕМОЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ РАЗРЕЗОВ (ТРЕЩИН)

Рассмотрим изотропную пологую сферическую оболочку толщиной $2h$. Пусть оболочка имеет N прямолинейных в плане произвольным образом расположенных параллельных сквозных трещин (разрезов) длиной $2l_k$ ($k = \overline{1, N}$). Предположим, что оболочка находится под действием внешней нагрузки, а к берегам разрезов приложены самоуравновешенные усилия и моменты. Считаем, что в процессе деформации оболочки при заданной нагрузке берега разрезов не контактируют.

Отнесем срединную поверхность оболочки к прямоугольной декартовой системе координат xOy , причем ось Ox направим параллельно линиям расположения разрезов. На каждом разрезе введем локальную систему координат $x_k O_k y_k$, начало которой совместим с центром разреза, а ось $O_k x_k$ направим по линии разреза. Центры разрезов в базисной системе координат xOy имеют координаты (x_k^0, y_k^0) , а оси $O_k x_k$ образуют с осью Ox углы $\beta_k = 0$ или $\beta_k = \pi$. Напряженное состояние рассматриваемой оболочки можно представить в виде суммы напряженного состояния, вызванного внешней нагрузкой в оболочке без разрезов, и возмущенного, вызванного наличием разрезов (трещин). Задача сводится к нахождению возмущенного напряженного состояния, так как напряженное состояние сплошной оболочки определяется известными методами.

Используя предложенный в работах [3, 4] метод решения задач теории тонких оболочек с трещинами, для определения возмущенного напряженного состояния пологой сферической оболочки [1] с одной трещиной $|x_k| \leq l_k$, $y_k = 0$ получаем разрушающую систему дифференциальных уравнений относительно функций $\varphi_k(x_k, y_k)$ и $w_k(x_k, y_k)$:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \varphi_k - \frac{D_0}{R} \nabla^2 w_k &= -D_0 (\nabla_1^2 \varepsilon_{22}^0 - \nabla_1 \nabla_2 \varepsilon_{12}^0), \\ \nabla^2 \nabla^2 w_k + \frac{1}{DR} \nabla^2 \varphi_k &= -(\nu \nabla_1^2 + \nabla_2^2) \kappa_{22}^0 - 2(1 - \nu) \nabla_1 \nabla_2 \kappa_{12}^0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь

$$\nabla^2 = \nabla_1^2 + \nabla_2^2; \quad \nabla_1 = \frac{\partial}{\partial x_k}; \quad \nabla_2 = \frac{\partial}{\partial y_k}; \quad D_0 = 2Eh; \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1 - \nu^2)};$$

E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона; R — радиус срединной поверхности оболочки; $\varepsilon_{ij}^0, \kappa_{ij}^0$ — компоненты тензора дисторсии, характеризующие скачки перемещений и угла поворота на линии разреза и выражающиеся формулами

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22}^0(x_k, y_k) &= \varepsilon_{2k}(x_k) \delta(y_k), \quad \varepsilon_{12}^0(x_k, y_k) = \varepsilon_{3k}(x_k) \delta(y_k), \\ \kappa_{22}^0(x_k, y_k) &= \kappa_{2k}(x_k) \delta(y_k) + \kappa_{4k}(x_k) \nabla_2 \delta(y_k), \\ \kappa_{12}^0(x_k, y_k) &= \nabla_1 \kappa_{4k}(x_k) \delta(y_k), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2k} &= v_k^+ - v_k^-, \quad \varepsilon_{3k} = u_k^+ - u_k^-, \quad \kappa_{4k} = -[\omega_k^+ - \omega_k^-], \\ \kappa_{2k} &= -[(\nabla_2 \omega_k)^+ - (\nabla_2 \omega_k)^-], \quad |x_k| < l_k; \\ \varepsilon_{2k} &= \varepsilon_{3k} = \kappa_{2k} = \kappa_{4k} = 0, \quad |x_k| \geq l_k; \end{aligned}$$

$\delta(y_k)$ — функция Дирака. Знаками «+» и «-» обозначены граничные значения соответствующих функций на берегах разреза $y_k = +0$ и $y_k = -0$ соответственно.

Решая систему (1), для функции напряжений φ_k и функции прогибов w_k получаем выражения

$$\begin{aligned} g_k^{(i)}(x_k, y_k) &= \frac{c_i}{2\pi} \int_{-l_k}^{l_k} \{\varepsilon_{2k}(\xi) \Phi_i(x_k - \xi, y_k) + \varepsilon_{3k}(\xi) \Phi_{i+2}(x_k - \xi, y_k) + \\ &+ Rc[\kappa_{2k}(\xi) F_i(x_k - \xi, y_k) + \kappa_{3k}(\xi) F_{i+2}(x_k - \xi, y_k)]\} d\xi \quad (i = 1, 2), \quad (3) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} g_k^{(1)} &= w_k; \quad g_k^{(2)} = \varphi_k; \quad \Phi_1 = f_1 - \text{kei } \gamma r; \quad \Phi_2 = f_2 + \text{ker } \gamma r; \\ \Phi_3 &= f_3; \quad \Phi_4 = f_4; \quad F_1 = v \text{ker } \gamma r - (1 - v) f_2; \quad F_2 = v \text{kei } \gamma r + (1 - v) f_1; \\ F_3 &= -(1 - v) f_4 + \int_0^{z_k} \nabla_2 \text{ker } \gamma r dz_k; \end{aligned}$$

$$F_4 = (1 - v) f_3 + \int_0^{z_k} \nabla_2 \text{kei } \gamma r dz_k; \quad f_1 = \psi_1 \frac{y_k^2}{r^2} - \psi_3;$$

$$f_2 = \psi_2 \frac{y_k^2}{r^2} - \psi_4; \quad f_3 = \psi_1 \frac{y_k z_k}{r^2}; \quad f_4 = \psi_2 \frac{y_k z_k}{r^2};$$

$$\psi_1 = \frac{2}{\gamma^2 r^2} + \frac{2 \text{ker}' \gamma r}{\gamma r} + \text{kei } \gamma r; \quad \psi_2 = \frac{2 \text{kei}' \gamma r}{\gamma r} - \text{ker } \gamma r;$$

$$\psi_3 = \frac{1}{\gamma^2 r^2} + \frac{\text{ker}' \gamma r}{\gamma r}; \quad \psi_4 = \frac{\text{kei}' \gamma r}{\gamma r}; \quad r^2 = z_k^2 + y_k^2;$$

$$z_k = x_k - \xi; \quad \kappa_{3k}(\xi) = \frac{d}{d\xi} \kappa_{4k}(\xi); \quad c_1 = \frac{1}{Rc}; \quad c_2 = D_0;$$

$$c^2 = \frac{h^2}{3(1 - \nu^2) R^2}; \quad \gamma = \frac{1}{R\sqrt{c}}; \quad \text{ker}' x = \frac{d}{dx} \text{ker } x;$$

$$\text{kei}' x = \frac{d}{dx} \text{kei } x; \quad \text{ker } x, \text{kei } x \text{ — функции Томсона.}$$

Подставляя выражения (3) в соответствующие формулы для определения усилий и моментов [4], а также используя формулы работы [5], получаем выражения для усилий и моментов на произвольной площадке. В частности, на линии n -го разреза $|x_n| \leq l_n$, $y_n = 0$ эти выражения имеют вид

$$\begin{aligned} G_{nk}^{(i)} &= \frac{A_i}{2\pi} \int_{-l_k}^{l_k} \{\Psi_{1k}(\xi) K_{nk}^{(i)}(\xi, x_n) + \Psi_{2k}(\xi) L_{nk}^{(i)}(\xi, x_n) + \Psi_{3k}(\xi) P_{nk}^{(i)}(\xi, x_n) + \\ &+ \Psi_{4k}(\xi) R_{nk}^{(i)}(\xi, x_n)\} d\xi, \quad |x_n| \leq l_n \quad (n = \overline{1, N}; \quad i = \overline{1, 4}). \quad (4) \end{aligned}$$

Здесь

$$G_{nk}^{(1)} = N_{nk}; \quad G_{nk}^{(2)} = S_{nk}; \quad G_{nk}^{(3)} = M_{nk}; \quad G_{nk}^{(4)} = \int Q_{nk}^* dx_n + c_{nk};$$

$$Q_{nk}^* = Q_{nk} + \frac{\partial}{\partial x_n} H_{nk}; \quad \Psi_{1k}(\xi) = \frac{d}{d\xi} \varepsilon_{2k}(\xi); \quad \Psi_{2k}(\xi) = \frac{d}{d\xi} \varepsilon_{3k}(\xi);$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{3k}(\xi) &= Rc \frac{d}{d\xi} \kappa_{2k}(\xi); \quad \Psi_{4k}(\xi) = Rc \frac{d}{d\xi} \kappa_{3k}(\xi); \quad K_{nk}^{(1)} = \omega_2 + \omega_4 - \omega_{11}; \\
L_{nk}^{(1)} &= \omega_6 - \omega_{12}; \quad P_{nk}^{(1)} = \nu \omega_3 + (1 - \nu)(\omega_1 - \omega_9); \\
R_{nk}^{(1)} &= \omega_7 + (1 - \nu)(\omega_5 - \omega_{10}); \quad K_{nk}^{(2)} = L_{nk}^{(1)}; \quad L_{nk}^{(2)} = \omega_{11} - \omega_2; \\
P_{nk}^{(2)} &= -\omega_7 + (1 - \nu)(\omega_5 - \omega_{10}); \quad R_{nk}^{(2)} = \omega_3 - (1 - \nu)(\omega_1 - \omega_9) - \omega_{13}; \\
K_{nk}^{(3)} &= P_{nk}^{(1)}; \quad L_{nk}^{(3)} = P_{nk}^{(2)}; \quad P_{nk}^{(3)} = (1 - \nu)^2(\omega_{11} - \omega_2) + (1 - \nu^2)\omega_4 - \omega_{14}; \\
R_{nk}^{(3)} &= (1 - \nu)^2(\omega_{12} - \omega_6) + \omega_{16}; \quad K_{nk}^{(4)} = d_1 \omega_7 + (1 - \nu)(\omega_5 - \omega_{10}); \\
L_{nk}^{(4)} &= d_1(\omega_3 - \omega_{13}) + (1 - \nu)(\omega_1 - \omega_9); \\
P_{nk}^{(4)} &= d_1[(1 - \nu)\omega_8 + \omega_{16}] + (1 - \nu)^2(\omega_{12} - \omega_6) - (1 - \nu)\omega_8; \\
R_{nk}^{(4)} &= d_1[(1 - \nu)\omega_4 - \nu\omega_{14} + \omega_{17}] + (1 - \nu)^2(\omega_2 - \omega_{11}) + (1 - \nu)(\omega_4 - \omega_{14}); \\
A_1 &= A_2 = D_0; \quad A_3 = A_4 = D_0 Rc; \quad d_1 = \cos(\beta_n - \beta_k).
\end{aligned}$$

Функции ω_i определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
\omega_i &= L_i \frac{s}{\rho^2}, \quad \omega_{i+4} = L_i \frac{t}{\rho^2} \quad (i = \overline{1, 4}), \\
\omega_9 &= L_5 \frac{s^2}{\rho^4}, \quad \omega_{10} = L_5 \frac{s^2 t}{\rho^4}, \quad \omega_{11} = L_6 \frac{s^2}{\rho^4}, \quad \omega_{12} = L_6 \frac{s^2 t}{\rho^4}, \\
\omega_{13} &= \gamma^2 \int_0^s \ker \gamma \rho ds, \quad \omega_{14} = \gamma^2 \int_0^s \text{kei} \gamma \rho ds, \\
\omega_{15} &= \gamma^2 \int_0^s \int_0^s \partial_2 \ker \gamma \rho ds ds, \quad \omega_{16} = \gamma^2 \int_0^s \int_0^s \partial_2 \text{kei} \gamma \rho ds ds, \\
\omega_{17} &= \gamma^3 \int_0^s \int_0^s \int_0^s \ker \gamma \rho ds ds ds, \quad L_1 = \frac{2}{\gamma^2 \rho^2} + \frac{2 \ker' \gamma \rho}{\gamma \rho} + \text{kei} \gamma \rho, \\
L_2 &= \frac{2 \text{kei}' \gamma \rho}{\gamma \rho} - \ker \gamma \rho, \quad L_3 = \gamma \rho \text{kei}' \gamma \rho, \quad L_4 = \gamma \rho \ker' \gamma \rho, \\
L_5 &= \frac{8}{\gamma^2 \rho^2} + \frac{8 \ker' \gamma \rho}{\gamma \rho} + 4 \text{kei} \gamma \rho - \gamma \rho \text{kei}' \gamma \rho, \\
L_6 &= \frac{8 \text{kei}' \gamma \rho}{\gamma \rho} - 4 \ker \gamma \rho + \gamma \rho \ker' \gamma \rho, \quad \rho^2 = s^2 + t^2, \quad s = \eta - \xi, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \\
\eta &= (x_n^0 - x_k^0) \cos \beta_k + x_n \cos(\beta_n - \beta_k), \quad t = (y_n^0 - y_k^0) \cos \beta_k,
\end{aligned}$$

— постоянная интегрирования). В силу линейности рассматриваемой задачи суммарные усилия и моменты на линии n -го разреза, вызванные всеми скачками перемещений и углов поворота на N разрезах $|x_k| \leq l_k, y_k = 0$ ($k = \overline{1, N}$), получим путем суперпозиции усилий и моментов для изолированных разрезов:

$$G_n^{(i)} = \sum_{k=1}^N G_{nk}^{(i)}, \quad |x_n| \leq l_n \quad (n = \overline{1, N}; i = \overline{1, 4}), \quad (5)$$

где

$$G_n^{(1)} = N_2, \quad G_n^{(2)} = S, \quad G_n^{(3)} = M_2, \quad G_n^{(4)} = \int Q_2^* dx_n + c_n$$

— соответственно нормальное и сдвигающее усилия, изгибающий момент z обобщенная в смысле Кирхгофа перерезывающая сила.

Условия, которым должны удовлетворять компоненты возмущенного напряженного состояния на линии каждого разреза $|x_k| \leq l_k, y_k = 0$ ($k =$

$= \overline{1, N}$), можно записать так:

$$\begin{aligned} N_2^+(x_k, 0) = N_2^-(x_k, 0) = f_{1k}(x_k), \quad S^+(x_k, 0) = S^-(x_k, 0) = f_{2k}(x_k), \\ M_2^+(x_k, 0) = M_2^-(x_k, 0) = f_{3k}(x_k), \quad Q_2^{*+}(x_k, 0) = Q_2^{*-}(x_k, 0) = f_{4k}(x_k), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$f_{ik}(x_k) = f_{ik}^1(x_k, 0) - f_{ik}^0(x_k, 0) \quad (i = \overline{1, 4}),$$

f_{ik}^1 — заданные на берегах разрезов усилия и моменты; f_{ik}^0 — усилия и моменты на линиях $|x_k| \leq l_k, y_k = 0$ ($k = \overline{1, N}$), вызванные внешней нагрузкой в оболочке без трещин.

Удовлетворив условиям (6), получим систему $4N$ сингулярных интегральных уравнений для определения неизвестных функций $\Psi_{ik}(\xi)$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \int_{-l_k}^{l_k} [\Psi_{1k}(\xi) K_{nk}^{(i)}(\xi, x_n) + \Psi_{2k}(\xi) L_{nk}^{(i)}(\xi, x_n) + \Psi_{3k}(\xi) P_{nk}^{(i)}(\xi, x_n) + \\ + \Psi_{4k}(\xi) R_{nk}^{(i)}(\xi, x_n)] d\xi = \frac{2\pi}{A_i} f_{in}(x_n), \quad |x_n| \leq l_n \quad (n = \overline{1, N}; i = \overline{1, 4}). \end{aligned} \quad (7)$$

Ядра системы уравнений (7) являются регулярными функциями, за исключением случая $n = k$, когда ядра $K_{nn}^{(1)}, L_{nn}^{(2)}, P_{nn}^{(3)}$ и $R_{nn}^{(4)}$ имеют сингулярности типа Коши. Решение системы (7) должно удовлетворять следующим условиям:

$$\int_{-l_k}^{l_k} \Psi_{ik}(\xi) d\xi = 0 \quad (i = \overline{1, 4}), \quad \int_{-l_k}^{l_k} \kappa_{3k}(\xi) d\xi = 0 \quad (k = \overline{1, N}), \quad (8)$$

обеспечивающим неразрывность перемещений и углов поворота в вершинах трещин.

Отметим, что если в системе (7) принять $y_n^0 = y_k^0 = 0$, то в результате получим систему интегральных уравнений, описывающую упругое равновесие сферической оболочки с системой N коллинеарных разрезов (трещин), расположенных вдоль оси x . При этом ядра $L_{nk}^{(1)} = R_{nk}^{(2)} = P_{nk}^{(2)} = R_{nk}^{(3)} = 0$ и данная система уравнений распадается на две независимые системы, соответствующие симметричной и антисимметричной относительно линии расположения трещин нагрузкам.

Взаимодействие трещин проанализировано для случая оболочки с двумя коллинеарными трещинами одинаковой длины $2l$, берега которых находятся под действием равных по величине равномерно распределенных усилий $N_2^1(x, 0) = -N_2^0$ и изгибающих моментов $M_2^1(x, 0) = -M_2^0$. В этом случае система интегральных уравнений (7) в безразмерных координатах, отнесенных к полудлине трещины l , принимает вид

$$\sum_{j=1,3} \int_{-1}^1 \Psi_j(\zeta) K_{ij}(x - \zeta) d\zeta = f_i(x), \quad |x| < 1 \quad (i = 1, 3). \quad (9)$$

Здесь

$$\Psi_1(\zeta) = \frac{d}{d\zeta} \varepsilon_2(\zeta); \quad \Psi_3(\zeta) = Rc \frac{d}{d\zeta} \kappa_2(\zeta); \quad K_{ii} = \sum_{k=1}^2 \left[-\frac{a_i}{z_k} + K_{ii}^0(z_k) \right];$$

$$K_{13} = K_{31} = \sum_{k=1}^2 K_{13}^0(z_k);$$

$$\begin{aligned} K_{11}^0 = \omega_2 + \omega_4; \quad K_{13}^0 = (1 - \nu) \omega_1 + \nu \omega_3; \quad K_{33}^0 = -(1 - \nu)^2 \omega_2 + \\ + (1 - \nu^2) \omega_4 + \omega_5; \quad \omega_1 = \left(\frac{2}{\lambda^2 |z_k|^2} + \frac{2 \operatorname{ker}' \lambda |z_k|}{\lambda |z_k|} + \operatorname{kei} \lambda |z_k| \right) \frac{1}{z_k}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \left(\frac{2 \operatorname{kei}' \lambda |z_k|}{\lambda |z_k|} - \operatorname{ker} \lambda |z_k| - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{z_k}; & \omega_3 &= \frac{\lambda |z_k|}{z_k} \operatorname{kei}' \lambda |z_k|; \\ \omega_4 &= (\lambda |z_k| \operatorname{ker}' \lambda |z_k| + 1) \frac{1}{z_k}; & \omega_5 &= \lambda^2 \int_0^k \operatorname{kei} \lambda |z_k| dz_k, \\ z_1 &= x - \zeta; & z_2 &= -\left(x + \zeta + 2 \frac{d}{l}\right); & f_1 &= -\frac{2\pi}{D_0} N_2^0; \\ f_3 &= -\frac{2\pi}{D_0 R c} M_2^0; & \lambda &= \gamma l; & a_1 &= \frac{1}{2}; & a_3 &= \frac{3 - 2\nu - \nu^2}{2};\end{aligned}$$

$2d$ — расстояние между центрами трещин.

Решая систему сингулярных интегральных уравнений (9) методом механических квадратур [2], для определения коэффициентов интенсивности усилий K_1^\pm и моментов K_3^\pm в окрестности внешних (+) и внутренних (—) вершин трещин получаем выражения

$$K_i^+ = k_i \frac{a_i}{2} \sum_{m=1}^{i-1} A_m', \quad K_i^- = k_i \frac{a_i}{2} \sum_{m=1}^{i-1} (-1)^{m+1} A_m' \quad (i = 1, 3). \quad (10)$$

Здесь

$$\begin{aligned}k_1 &= N_2^0 \sqrt{l}; & k_3 &= N_2^0 R c \sqrt{l}; & A_m' &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \Phi_{ik}^* \cos m\theta_k; \\ \Phi_{ik}^* &= \Phi_i^*(x_k); & \Phi_i^*(x) &= -\frac{D_0}{N_2^0} \varphi_i(x); & \varphi_i(x) + c_i &= \sqrt{1-x^2} \Psi_i(x);\end{aligned}$$

c_i — постоянные, определяемые из условий (8); Φ_{ik}^* — корни системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \alpha_{mk} \Phi_{1k}^* + \sum_{k=1}^n \beta_{mk} \Phi_{3k}^* &= 1, \\ \sum_{k=1}^n \beta_{mk} \Phi_{1k}^* + \sum_{k=1}^n \gamma_{mk} \Phi_{3k}^* &= \rho \quad (m = \overline{1, n}),\end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_{mk} &= \frac{1}{2n} [a_1 \psi_{mk} + K_1(z_1) + K_1(z_2)]; & \beta_{mk} &= \frac{1}{2n} [K_2(z_1) + K_2(z_2)]; \\ \gamma_{mk} &= \frac{1}{2n} [a_2 \psi_{mk} + K_3(z_1) + K_3(z_2)]; & \psi_{mk} &= \frac{1}{\sin \theta_m} \operatorname{ctg} \frac{c_{mk}}{2}; \\ K_1(z_j) &= K_{11}^0(z_j) - \Gamma_m^j; & K_2(z_j) &= K_{13}^0(z_j) - \Gamma_m^{j+2}; \\ K_3(z_j) &= K_{33}^0(z_j) - \Gamma_m^{j+1} \quad (j = 1, 2); & \Gamma_m^j &= \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n K_{11}^0(\alpha_r); \\ \Gamma_m^{j+2} &= \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n K_{13}^0(\alpha_r); & \Gamma_m^{j+1} &= \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n K_{33}^0(\alpha_r); \\ z_1 &= \lambda |\cos \theta_m - \cos \theta_k|; & z_2 &= -\lambda \left(\cos \theta_m + \cos \theta_k + 2 \frac{d}{l} \right); \\ \alpha_1 &= \lambda |\cos \theta_m - \cos \theta_r|; & \alpha_2 &= -\lambda \left(\cos \theta_m + \cos \theta_r + 2 \frac{d}{l} \right), \\ c_{mk} &= \begin{cases} \theta_m - \theta_k, & |m - k| \text{ — нечетное,} \\ \theta_m + \theta_k, & |m - k| \text{ — четное,} \end{cases} & \rho &= \frac{M_2^0}{N_2^0 R c}, & \theta_s &= \frac{2s-1}{2n} \pi \quad (s = m, k, r).\end{aligned}$$

Условие отсутствия контакта берегов трещин под действием приложенной нагрузки получим в виде

$$\Delta^\pm(x) = \frac{1}{q} \sum_{m=1}^{n-1} (A_m^\pm \pm \sqrt{3(1-\nu^2)} A_m^3) \frac{\sin(m \arccos x)}{m} > 0, \quad (12)$$

где

$$\Delta^\pm(x) = V^+(x, 0, \pm h) - V^-(x, 0, \pm h);$$

$$V(x, 0, \pm h) = v(x, 0) \mp h\theta_2(x, 0); \quad q = \frac{D_0}{N_2^0 l}.$$

На основании формул (10) проведено исследование коэффициентов интенсивности усилий и моментов в окрестностях внешних и внутренних вершин трещин в зависимости от расстояния между трещинами, а по фор-

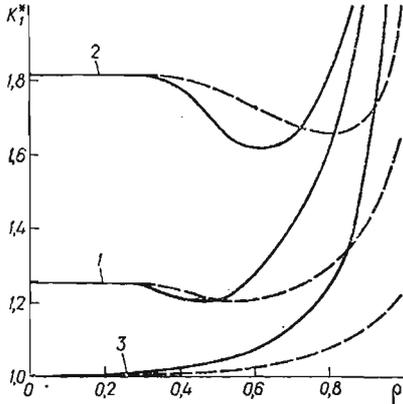


Рис. 1

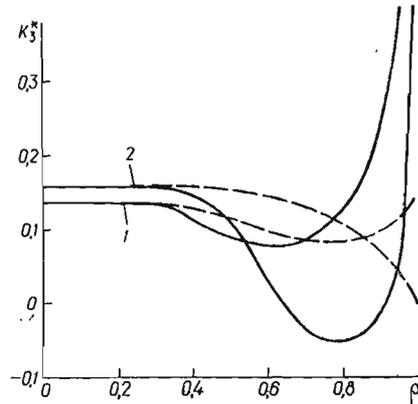


Рис. 2

муле (12) произведены подсчеты величин скачков перемещений берегов трещин по всей их длине на верхней и нижней поверхностях оболочки.

На рис. 1,2 приведены соответственно графики изменения относительных коэффициентов интенсивности усилий $K_1^* = K_1/k_1$ и моментов $K_3^* = K_3/k_3$ в оболочке для $\lambda = 1$ (кривые 1) и $\lambda = 2$ (кривые 2) при $M_2^0 = 0$ в зависимости от параметра $\rho = l/d$. Кривой 3 на рис. 1 показано изменение величины K_1^* в пластинке ($\lambda = 0$) в случае обобщенного плоского напряженного состояния. Сплошные линии соответствуют коэффициентам интенсивности в окрестности внутренних вершин трещин, штриховые — в окрестности внешних вершин.

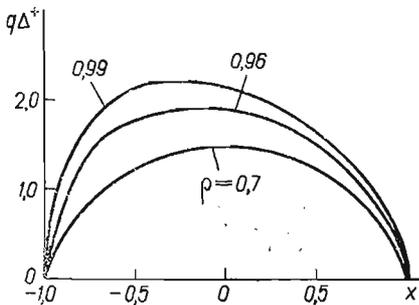


Рис. 3

Из анализа приведенных графиков следует, что взаимодействие полей напряжений разрезов (трещин) начинается при величине параметра $\rho = 0,3$. В начале взаимодействия коэффициенты интенсивности усилий и моментов в оболочке уменьшаются, а затем начинают возрастать, т. е. существует диапазон расстояний между трещинами, в котором величина коэффициентов интенсивности меньше, чем в случае одной трещины. При дальнейшем сближении коэффициенты интенсивности в окрестности внутренних вершин трещин неограниченно возрастают, а в окрестности внешних вершин стремятся к величинам, соответствующим одной трещине двойной длины. В отличие от оболочки коэффициент интенсивности K_1^* в пластинке возрастает монотонно.

На рис. 3 приведены графики изменения величины $q\Delta^+(x)$ на верхней ($z = -h$) поверхности оболочки ($\lambda = 2$) в зависимости от параметра $\rho = l/d$ в случае, когда одновременно с растягивающими усилиями N_2^0 к берегам трещин были приложены изгибающие моменты $M_2^0 = RcN_2^0$. Из графи-

ков видно, что при сближении трещин до значения параметра $\rho = 0,7$ перемещения берегов трещин симметричны относительно середины трещины. При дальнейшем сближении трещин происходит раскрытие их у внутренних вершин, что в конечном счете приводит к разрыву перемычки между трещинами.

1. Власов В. Э. Избранные труды.— М. : Изд-во АН СССР, 1962.— Т. 1. 528 с.
2. Каландия А. И. Замечание о креплении полуплоскости стрингером конечной длины.— В кн.: Механика деформируемых тел и конструкций. М. : Машиностроение, 1975, с. 211—215.
3. Осадчук В. А., Подстригач Я. С. К определению напряженного состояния в замкнутой цилиндрической оболочке и бесконечной пластинке с трещинами.— Механика твердого тела, 1973, № 3, с. 69—78.
4. Подстригач Я. С., Осадчук В. А., Федюк Е. М., Николишин М. М. Метод дисторсий в теории тонких оболочек с трещинами.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 1, с. 29—41.
5. Черных К. Ф. Линейная теория оболочек.— Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1962. — Т. 1. 274 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
19.11.79

УДК 539.377

М. В. Хай

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОГО ТЕЛА С ТРЕЩИНОЙ, КОТОРАЯ ИМЕЕТ ВИД ПОЛУПЛОСКОСТИ

Известно, что задача термоупругости для бесконечного тела с трещиной, имеющей вид полуплоскости, сводится к решению двумерных интегродифференциальных уравнений [3]

$$\Delta \iint_S \frac{\alpha_j(\xi)}{|x-\xi|} d\xi_1 d\xi_2 + (-1)^j \nu (1 - \delta_{j3}) \frac{\partial}{\partial x_{3-j}} \iint_S \left[\alpha_1(\xi) \frac{\partial}{\partial x_2} - \alpha_2(\xi) \frac{\partial}{\partial x_1} \right] \frac{d\xi_1 d\xi_2}{|x-\xi|} = P_j(x), \quad x \in S, \quad j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Здесь $\alpha_j(\xi)$ — неизвестные функции, обращающиеся в нуль на контуре области S , которую занимает трещина; δ_{ij} — символ Кронекера; Δ — двумерный оператор Лапласа;

$$P_j(x) = \frac{1-\nu}{G} N_j(x) - \alpha_0 \left[\delta_{j3} \iint_S \frac{\mu(\xi)}{|x-\xi|} d\xi_1 d\xi_2 - (1 - \delta_{j3}) \frac{\partial}{\partial x_i} \iint_S \frac{\gamma(\xi)}{|x-\xi|} d\xi_1 d\xi_2 \right], \quad (2)$$

где G , ν — модуль сдвига и коэффициент Пуассона; $N_j(x)$ — заданные на поверхностях трещины внешние усилия (N_3 — нормальные, N_1 и N_2 — сдвигающие усилия); $\mu(\xi)$, $\gamma(\xi)$ — известные функции, через которые определяется температура в теле с трещиной. В общем случае функции μ и γ определяются из интегральных уравнений задач теплопроводности [2, 4], которые решаются в замкнутом виде. Далее считаем, что область S соответствует значениям $x_1 \leq 0$.

Интегральное уравнение (1) при $j = 3$ решается в замкнутом виде [2]. Для решения системы уравнений (1) при $j = 1, 2$ введем в рассмотрение функции

$$\alpha_j^-(\xi) = \begin{cases} \alpha_j(\xi), & \xi \in S, \\ 0, & \xi \in S^*, \end{cases} \quad P_j^-(x) = \begin{cases} P_j(x), & x \in S, \\ 0, & x \in S^*, \end{cases} \quad (3)$$

$$f_j^+(x) = \begin{cases} 0, & x \in S, \\ \text{неизвестная при } x \in S^*. \end{cases}$$