и величина $A^{(2)} = A_m^{(2)}$ этого максимума практически не зависят от внешнего магнитного поля. При $s^2 < \frac{4+\xi^4}{4\xi^2}\left(\frac{\varepsilon_1\tau_1}{1+4\tau_1^2} + \frac{\varepsilon_2\tau_2}{1+4\tau_2^2}\right)$ большему значению интенсивности внешнего магнитного поля соответствуют меньшие значения x_m и $A_m^{(2)}$. Это иллюстрируется рис. 1, на котором показано распределение функции $A_m^{(2)}/\beta_2$ в глубь полупространства из поликристаллического алюминия при $s^2 = 10^{-1}$, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 0 (кривые *1—6* соответственно) для $\rho = 2{,}7 \cdot 10^4$ $\frac{кг}{м^3}$, $c_1 = 5{,}1 \cdot 10^3$ м/с, $\beta = \frac{1}{3}$, $\Delta_0^{(1)} = 8 \cdot 10^{-4}$, $\sigma = 5 \times 10^7$ Ом$^{-1}$ · м$^{-1}$, $\tau_1 = 70$, $\xi^2 = 22{,}6$. Численные расчеты производились в пренебрежении эффектами объемной вязкости в связи с их малостью по сравнению с эффектами, обусловленными сдвиговой вязкостью [9]. При выборе $\Delta_0^{(1)}$ и τ_1 использованы данные, приведенные в этой же работе.

На рис. 2 показана зависимость функции $\lg A_m^{(2)}/\beta_2$ максимального значения амплитуды волны перемещения второй гармоники от $\lg \omega$ при $s^2 = 10^{-1}$, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 0 (кривые *1—5* соответственно). Из графиков видно, что влияние внешнего магнитного поля на $A_m^{(2)}$ особенно существенно при высоких частотах. Минимум максимального значения $A_m^{(2)}$ амплитуды волны соответствует значению параметра $\tau_1 = \omega\tau_1 = 1$

1. *Бурак Я. И., Кондрат В. Ф.* Магнитотермоупругие волны в полубесконечном электропроводном теле.— В кн.: Волны в сплошных средах. Киев : Наук. думка, 1978, с. 85—92.
2. *Дэйвис Р. М.* Волны напряжений в твердых телах.— М. : Изд-во иностр. лит., 1961.— 102 с.
3. *Зарембо Л. К., Красильников В. А.* Нелинейные явления при распространении упругих волн в твердых телах.— Успехи физ. наук, 1970, 102, № 4, с. 549—586.
4. *Кнопфель Г.* Сверхсильные импульсивные магнитные поля.— М. : Мир, 1972.— 391 с.
5. *Нагирный Т. С.* Нелинейные уравнения магнитотермовязкоупругости.— В кн.: Материалы V конф. молодых ученых Льв. фил. мат. физики Ин-та математики АН УССР. Секция механики деформируемого твердого тела. Львов, 1978, с. 74—77.
6. *Новаку В.* Введение в электродинамику.— М. : Изд-во иностр. лит., 1963.— 303 с.
7. *Підстригач Я. С., Бурак Я. Й., Кондрат В. Ф.* Магнітотермопружні процеси в електропровідних тілах при силовому навантаженні.— Вісн. АН УРСР, № 10, с. 12—21.
8. *Полякова А. Л.* Нелинейные эффекты в твердых телах.— Физика твердого тела, 1964, 6, № 1, с. 65—70.
9. *Постников В. С.* Внутреннее трение в металлах.— М. : Металлургиздат, 1974.— 351 с.
10. *Селезов И. Т., Селезова Л. В.* Волны в магнитогидроупругих средах.— Киев : Наук. думка, 1975.— 163 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 25.05.79

УДК 539.3 : 538.569

А. Р. Гачкевич, Р. Ф. Терлецкий

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ И НАПРЯЖЕНИЯ В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ УПРУГОМ СЛОЕ, НАХОДЯЩЕМСЯ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

В данной работе определены и исследованы электромагнитные, тепловые поля и напряжения в слое, находящемся в периодическом во времени внешнем электромагнитном поле. При этом влияние поля на процессы деформации и теплопроводности связывается только с выделением тепла, обусловленного трением, возникающем при переориентации диполей в переменном электромагнитном поле, и наличием чисто омической проводимости в диэлектрике, что учитывается введением комплексной диэлектрической проницаемости и ее дисперсией с частотой [2, 4, 9]. В отличие от известных в литературе работ по определению температурных полей в диэлектрике [4, 6], в которых тепловыделения усредняются во времени по периоду колебания электромагнитной волны и пренебрегается процессом теплопроводности [6], здесь учитывается периодический характер изменения во времени электромагнитного поля. Физико-механические характеристики слоя считаем постоянными и влиянием подвижности среды на электромагнитное поле пренебрегаем.

Рассмотрим упругий диэлектрический слой при заданной на поверхностях слоя $z = 0, 1$ напряженности электрического поля $E_x = E_0 e^{i\omega t}$, где ω — круговая частота; t — время; x, y, z — отнесенные к толщине слоя h декартовые координаты. В области слоя отличными от нуля будут напряженности электрического $E_x(z, t) = E(z)\, e^{i\omega t}$ и магнитного $H_y(z, t) = H(z)\, e^{i\omega t}$ полей. Из системы уравнений Максвелла при комплексной диэлектрической проницаемости $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon' - i\varepsilon''$ [7, 9] получаем

$$E(z) = E_0 \frac{\operatorname{ch} \frac{k}{2}(2z-1)}{\operatorname{ch} \frac{k}{2}}, \tag{1}$$

где $k = \beta + i\alpha$; $\beta = \frac{\omega h}{c}\sqrt{\varepsilon}\sin\frac{\delta}{2}$; $\alpha = \frac{\omega h}{c}\sqrt{\varepsilon}\cos\frac{\delta}{2}$; $\varepsilon = |\tilde{\varepsilon}|$; $\varepsilon'/\varepsilon'' = \operatorname{tg}\delta$ — тангенс угла диэлектрических потерь; $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ — электродинамическая постоянная. Не нарушая общности рассуждений, магнитную проницаемость среды μ здесь и далее считаем равной единице.

Удельную плотность тепловых источников [2]

$$Q = \frac{\sigma}{2}\{\operatorname{Re}[E(z)\, e^{i\omega t}]\}, \tag{2}$$

согласно работе [5], представим в виде $Q = Q^{(1)} + Q^{(2)}$.
Здесь

$$Q^{(1)} = \frac{\sigma E_0^2}{2(\operatorname{ch}\beta + \cos\alpha)^2}[\operatorname{ch}\beta(2z-1) + \cos\alpha(2z-1)];$$

$$\begin{aligned} Q^{(2)} = \frac{\sigma E_0^2}{4(\operatorname{ch}\beta + \cos\alpha)^2}\{&[\cos 2\alpha z \operatorname{ch} 2\beta(z-1) + \cos 2\alpha(z-1)\operatorname{ch} 2\beta z + \\ &+ 2\cos\alpha(2z-1)\operatorname{ch}\beta(2z-1) + 2(1+\cos\alpha\operatorname{ch}\beta)]\cos 2\omega t - \\ &- [\sin 2\alpha z \operatorname{sh} 2\beta(z-1) + \sin 2\alpha(z-1)\operatorname{sh} 2\beta z + \\ &+ 2\sin\alpha(2z-1)\operatorname{sh}\beta(2z-1) - 2\sin\alpha\operatorname{sh}\beta]\sin 2\omega t\}; \end{aligned} \tag{3}$$

$\sigma = \omega\varepsilon_0\varepsilon''$ — проводимость диэлектрика.

Температурные поля и напряжения находим для слоя, на свободных от силового нагружения основаниях которого поддерживается конвективный теплообмен с внешней средой. Температура среды T_0. Полагая $u_x = u_y = 0$ и пренебрегая связанностью полей деформации и температуры, приходим к решению системы уравнений [5]

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{\partial T}{\partial \tau} = -\frac{h^2}{\lambda} Q(z, \tau), \\ &\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - q^2 h^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{(1+\nu)\alpha_t h}{1-\nu}\frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned} \tag{4}$$

при начальных

$$T(z, 0) = 0, \quad u_z(z, 0) = 0, \frac{\partial u_z(z, 0)}{\partial z} = 0 \tag{5}$$

и граничных

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial z} - \operatorname{Bi} T(0, \tau) = 0,$$

$$\frac{\partial T(1, \tau)}{\partial z} + \mathrm{Bi}\, T(1, \tau) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{(1+\nu)\,\alpha_t h}{1-\nu} T \quad \text{при} \quad z = 0,\ 1$$

условиях, где $T(z, \tau)$ — отклонение температуры от начальной; $q^2 = \frac{(1-2\nu)\rho}{2(1-\nu)G}$; $\frac{1}{q}$ — скорость распространения поперечной волны; λ, a — коэффициенты тепло- и температуропроводности; α_t — коэффициент линейного расширения; E, G, ν — соответственно модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона; ρ — плотность; $\tau = \frac{at}{h^2}$ — критерий Фурье; Bi — критерий Био. Нормальные напряжения σ_x, σ_y, σ_z по найденным u_z и T определяются формулами [5]

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{2G}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\frac{\partial u_z}{\partial z} - \alpha_t(1+\nu)T\right], \\ \sigma_x &= \sigma_y = \frac{2G}{1-2\nu}\left[\nu\frac{\partial u_z}{\partial z} - \alpha_t(1+\nu)T\right]. \end{aligned} \tag{7}$$

В соответствии с выражением для тепловых потерь температуру и перемещения представим в виде [5]

$$T = T^{(1)} + T^{(2)}, \quad u_z = u_z^{(1)} + u_z^{(2)}, \tag{8}$$

где T^j, u_z^j $(j = 1, 2)$ удовлетворяют уравнениям (4) при сформулированных начальных и граничных условиях. Составляющие $T^{(1)}$, $u_z^{(1)}$ находим в квазистатической постановке [5], т. е. из системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial z^2} - \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \tau} &= -\frac{h^2}{\lambda} Q^{(1)}, \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} &= \frac{(1+\nu)\,\alpha_t h}{1-\nu}\,\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} \end{aligned} \tag{9}$$

при начальном $T(z, 0) = 0$ и граничных условиях (6). Применяя конечное интегральное преобразование по z [1], получаем

$$\begin{aligned} T^{(1)}(z, \tau) = \frac{A}{2(\operatorname{ch}\beta + \cos\alpha)} \Bigg\{ & \frac{\cos\alpha(2z-1)}{4\alpha^2} - \frac{\operatorname{ch}\beta(2z-1)}{4\beta^2} + \\ & + \frac{1}{\mathrm{Bi}}\left[\frac{\operatorname{sh}\beta}{2\beta} + \frac{\sin\alpha}{2\alpha} - \mathrm{Bi}\left(\frac{\cos\alpha}{4\alpha^2} - \frac{\operatorname{ch}\beta}{4\beta^2}\right)\right] - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{B_n^2\beta_n^2} K(\beta_n, z)\left(\frac{\mathrm{Bi}}{\beta_n}K_n + L_n\right) e^{-\beta_n^2\tau}\Bigg\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь

$$B_n^2 = \frac{1}{2\beta_n^3}\left[(\beta_n^2 + \mathrm{Bi}^2)\beta_n + 2\,\mathrm{Bi}\,\beta_n\sin^2\beta_n + (\beta_n^2 - \mathrm{Bi})\sin 2\beta_n\right];$$

$$K(\beta_n, z) = \frac{\mathrm{Bi}}{\beta_n}\sin\beta_n(1-z) + \cos\beta_n(1-z); \quad A = \frac{\sigma E_0^2 h^2}{\lambda};$$

$$K_n = \frac{\beta_n \operatorname{ch}\beta \sin^2\frac{\beta_n}{2} + \beta\operatorname{sh}\beta\sin\beta_n}{4\beta^2 + \beta_n^2} - \frac{\alpha\sin\alpha\sin\beta_n - \beta_n\cos\alpha\sin^2\frac{\beta_n}{2}}{4\alpha^2 - \beta_n^2};$$

$$L_n = \frac{4\beta\operatorname{sh}\beta\cos^2\frac{\beta_n}{2} + \beta_n\sin\beta_n\operatorname{ch}\beta}{4\beta^2 + \beta_n^2} + \frac{4\alpha\sin\alpha\cos^2\frac{\beta_n}{2} - \beta_n\cos\alpha\sin\beta_n}{4\alpha^2 - \beta_n^2},$$

а β_n — ненулевые корни уравнения

$$\frac{\beta^2 - \mathrm{Bi}^2}{2\beta\,\mathrm{Bi}} = \mathrm{ctg}\,\beta.$$

Соответствующие температурные напряжения определяются формулами

$$\sigma_z^{(1)} = 0,\quad \sigma_x^{(1)} = \sigma_y^{(1)} = -\frac{\alpha_t E}{1-\nu}T^{(1)}. \tag{11}$$

Функции $T^{(2)}$, $u_z^{(2)}$ согласно выражениям (3) ищем в виде

$$\begin{aligned} T^{(2)} &= \varphi(z)e^{2i\omega t} + \bar{\varphi}(z)e^{-2i\omega t},\\ u_z^{(2)} &= \chi(z)e^{2i\omega t} + \bar{\chi}(z)e^{-2i\omega t}. \end{aligned} \tag{12}$$

Из уравнений (4) и граничных условий (6) получаем

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{A}{(4k^2-\eta_1^2)(1+\mathrm{ch}\,k)}\left[C_0(C\,\mathrm{ch}\,\eta_1 z + \mathrm{sh}\,\eta_1 z) + \mathrm{ch}\,k(2z-1) - \frac{4k^2-\eta_1^2}{\eta_1^2}\right],\\ \chi(z) &= \frac{(1+\nu)\alpha_t hA}{(1-\nu)(4k^2-\eta_1^2)(1+\mathrm{ch}\,k)}\Big[C_1\cos\eta_2 z + C_2\sin\eta_2 z +\\ &\quad + \frac{\eta_1}{\eta_1^2+\eta_2^2}C_0(C\,\mathrm{sh}\,\eta_1 z + \mathrm{ch}\,\eta_1 z) + \frac{2k}{\eta_2^2+4k^2}\,\mathrm{sh}\,k(2z-1)\Big], \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$C_0 = -\frac{\left(2k\,\mathrm{sh}\,k + \mathrm{Bi}\,\mathrm{ch}\,k - \mathrm{Bi}\,\dfrac{4k^2-\eta_1^2}{\eta_1^2}\right)[\mathrm{Bi}\,(1-\mathrm{ch}\,\eta_1) - \eta_1\,\mathrm{sh}\,\eta_1]}{2\,\mathrm{Bi}\,\mathrm{ch}\,\eta_1 + (\mathrm{Bi}^2+\eta_1^2)\,\mathrm{sh}\,\eta_1};$$

$$\begin{aligned} C_1 = -\frac{1}{\eta_2\sin\eta_2}\Big\{&\frac{\eta_2^2}{\eta_1^2+\eta_2^2}C_0[(\mathrm{ch}\,\eta_1 - \cos\eta_2)C + \mathrm{sh}\,\eta_1] +\\ &+ (1-\cos\eta_2)\left(\frac{\eta_2^2}{\eta_2^2+4k^2}\mathrm{ch}\,k - \frac{4k^2-\eta_1^2}{\eta_1^2}\right)\Big\}; \end{aligned}$$

$$C_2 = -\frac{\eta_2 C_0 C}{\eta_1^2+\eta_2^2} + \frac{\eta_2}{4k^2+\eta_2^2}\mathrm{ch}\,k - \frac{4k^2-\eta_1^2}{\eta_1^2\eta_2};$$

$$C = \frac{\eta_1(1+\mathrm{ch}\,\eta_1) + \mathrm{Bi}\,\mathrm{sh}\,\eta_1}{\mathrm{Bi}\,(1-\mathrm{ch}\,\eta_1) - \eta_1\,\mathrm{sh}\,\eta_1};\quad \eta_1 = \sqrt{\frac{\omega h^2}{a}}(1+i);\quad \eta_2 = 2\omega q h.$$

Соответствующие температурные напряжения будут такими:

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(2)} &= \frac{4G}{1-2\nu}\,\mathrm{Re}\left\{\left[(1-\nu)\frac{d\chi}{dz} - \alpha_t(1+\nu)\varphi(z)\right]e^{2i\omega t}\right\},\\ \sigma_x^{(2)} &= \sigma_y^{(2)} = \frac{4G}{1-2\nu}\,\mathrm{Re}\left\{\left[\nu\frac{d\chi}{dz} - \alpha_t(1+\nu)\varphi(z)\right]e^{2i\omega t}\right\}. \end{aligned} \tag{14}$$

Численное исследование температурных полей и напряжений проводилось для слоя из стеклопластика СНК-2-27 толщиной $h < 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ м при следующих характеристиках материала [3, 8]: $\lambda = 0{,}43\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{град}}$; $a = 0{,}228 \times 10^{-6}\ \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$; $\alpha_t = 0{,}11\cdot 10^{-4}\ \frac{1}{\text{град}}$; $E = 0{,}882\cdot 10^{10}\ \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$; $\nu = 0{,}28$; $\rho = 1{,}77 \times 10^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Для исследуемых толщин слоя во всем диапазоне частот, приведенном в таблице, параметр $\beta = \frac{\omega h}{c}\sqrt{\varepsilon}\sin\frac{\delta}{2}$ является малым, так что с достаточной для практических расчетов точностью можно принять $\mathrm{ch}\,\beta \approx 1$.

На рис. 1 представлено распределение усредненного по периоду колебаний электромагнитной волны $f = \frac{2\pi}{\omega}$ тепла $Q_* = \frac{2Q^{(1)}h}{\varepsilon_0 c E_0^2} L(\omega)$ по толщине слоя. Численные значения параметра $L(\omega) = \frac{\varepsilon' \operatorname{tg}\delta}{\sqrt{\varepsilon}\cos\frac{\delta}{2}}$ приведены в таблице. Кривые *1—5* на рис. 1 соответствуют значениям параметра $\alpha = \frac{\omega h}{c}\sqrt{\varepsilon}\cos\frac{\delta}{2} = 0{,}5;\ 1{,}5;\ 2{,}5;\ 4{,}5;\ 6$. Как видно из графиков, неравномерность распределения удельных тепловыделений по толщине слоя определяется соотношением между толщиной слоя h и длиной волны $\lambda_* = \frac{2\pi}{\alpha} h$. Если толщина слоя значительно меньше λ_*, тепло равномерно распределено

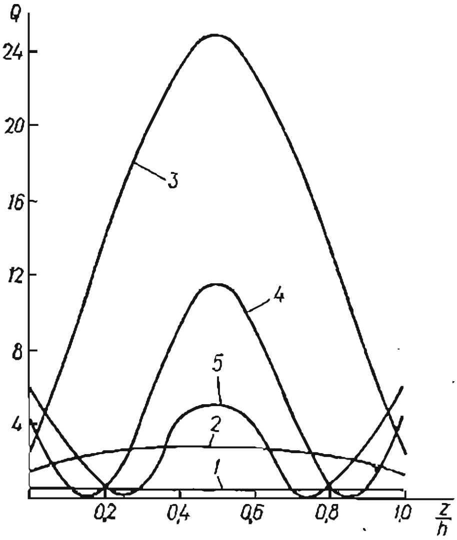

Рис. 1

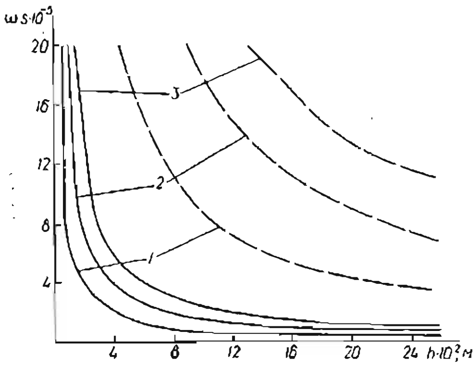

Рис. 2

по толщине. При толщинах порядка и меньше тепло распределено по толщине неравномерно. При этом для толщин слоя, равных полудлине волны, имеют место явления типа резонанса. Резонансные частоты внешнего электромагнитного поля определяются соотношением

$$\omega_m \sqrt{\varepsilon}\cos\frac{\delta}{2} = \frac{\pi c(2m-1)}{h} \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Количественная оценка температурных полей и напряжений, которые соответствуют нагреву тепловыми источниками (2) и усредненными по периоду $Q^{(1)}$, показала, что температурные поля совпадают независимо от критерия Био, причем составляющая $T^{(2)}$ практически не зависит от него. Соответствующие температурные напряжения отличаются незначительно, за исключением окрестностей резонансных частот

$$\omega_n = \frac{\pi n}{2qh} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где напряжения $\sigma^{(2)}$ могут достигать значительных величин. Эти результаты совпадают с результатами, полученными в работе [5] по исследованию термоупругого поведения в электромагнитном поле электропроводного слоя.

На рис. 2 показана зависимость первых трех резонансных частот электромагнитного поля ω_n $(n = 1, 2, 3)$ от толщины слоя при $s = 1$ (сплошные линии *1—3*). На этом же рисунке при $s = 5 \cdot 10^{-5}$ (штриховые линии *1—3*) показана зависимость от толщины слоя первых трех резонансных частот ω_m $(m = 1, 2, 3)$. Следует отметить, что первые резонансные частоты ω_n лежат ниже области частот, применяемых обычно в практике при нагреве диэлектриков. На рис. 3 представлено распределение температуры $T_* =$

ω, Гц	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	$3 \cdot 10^8$	$3 \cdot 10^9$	10^{10}
ε'	14,2	9,8	7,2	5,9	5,3	5,0	4,8	4,54	4,40	4,37
$10^4 \operatorname{tg} \delta$	2500	2600	1600	800	460	340	260	240	290	360
$L(\omega)$	1,0	1,3	2,3	5,3	9,4	13,0	17,5	20,0	16,4	11,6

$= \dfrac{2\lambda T^{(1)}}{\varepsilon_0 c h E_0^2} L(\omega)$ по толщине слоя в установившемся режиме в зависимости от значения параметра $\alpha = 0{,}5$; $2{,}5$; $4{,}5$ (кривые *1—3*) и критерия $\mathrm{Bi} = 1$ (сплошные линии), $\mathrm{Bi} = 10$ (штриховые), $\mathrm{Bi} = 100$ (штрихпунктирные). Кривые *1—3* характеризуют одновременно распределение напряжений $\sigma_* = -\dfrac{2(1-\nu)\lambda\sigma_x^{(1)}}{\varepsilon_0 c \alpha_t E h E_0^2} L(\omega)$. Зависимость температуры $T^{(1)}$на основаниях слоя

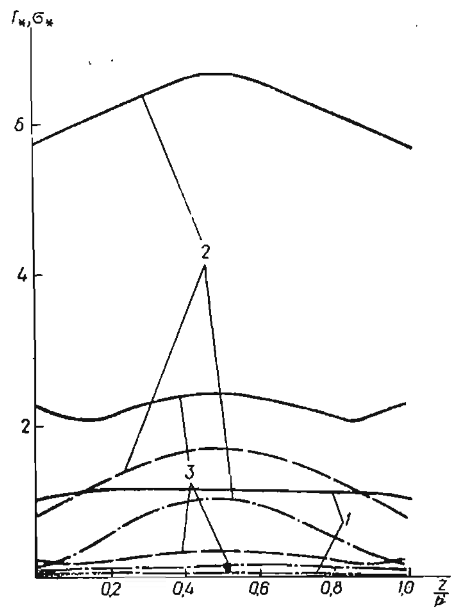

Рис. 3

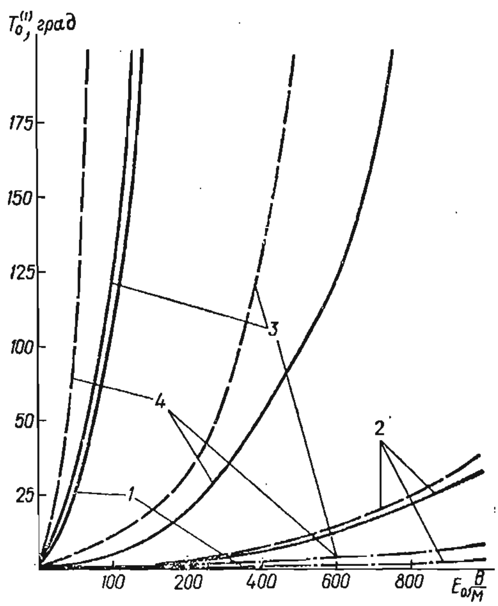

Рис. 4

в установившемся режиме от напряженности электрического поля E_0 при $\mathrm{Bi} = 1$ и $h = 4{,}5 \cdot 10^{-2}$; $9 \cdot 10^{-2}$; $13{,}5 \cdot 10^{-2}$; $15 \cdot 10^{-2}$ м (кривые *1—4*) для рассматриваемого материала приведена на рис. 4. Сплошные линии соответствуют частоте нагрева 10^{10} Гц, штриховые $3 \cdot 10^9$ Гц и штрихпунктирные $3 \cdot 10^8$ Гц.

Из анализа полученных результатов следует, что в отличие от распределения джоулева тепла по толщине электропроводного слоя, находящегося под воздействием электромагнитного поля [5], распределение удельной плотности тепловыделений в диэлектрике существенно зависит от соотношения между толщиной слоя и длиной волны λ_*. При этом при длине падающей волны, равной половине толщины слоя, имеют место наибольшие тепловыделения. Изменением длины волны можно существенно регулировать распределение тепловыделений, создавая при этом по толщине зоны более сильного и слабого нагрева.

1. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений.— М. ; Л. : Изд-во АН СССР, 1948.— 728 с.
2. *Каценеленбаум Б. З.* Высокочастотная электродинамика.— М. : Наука, 1966.— 240 с.
3. *Назаров Г. И., Сушкин В. В., Дмитриевская Л. В.* Конструктивные пластмассы: Справочник.— М. : Машиностроение, 1973.— 190 с.

4. *Нетушил А. В., Жуховицкий Б. М., Кудин В. Н., Парини Е. П.* Высокочастотный нагрев диэлектриков и полупроводников.— М.; Л. : Госэнергоиздат, 1959.— 480 с.
5. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Гачкевич А. Р., Чернявская Л. В.* Термоупругость электропроводных тел.— Киев : Наук. думка, 1977.— 246 с.
6. *Рикенглаз А. Э.* К теории нагрева диэлектриков мощными электромагнитными полями.— Инж.-физ. журн., 1974, 27, № 6, с. 1061—1068.
7. *Фрелих Г.* Теория диэлектриков.— М. : Изд-во иностр. лит., 1960.— 251 с.
8. *Хиппель А. Р.* Диэлектрики и их применение.— М.; Л. : Госэнергоиздат, 1959.— 336 с.
9. *Хиппель А. Р.* Диэлектрики и волны.— М. : Изд-во иностр. лит., 1960.— 438 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
19.11.79

УДК 539.3

Е. М. Федюк

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ПОЛОГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С СИСТЕМОЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ РАЗРЕЗОВ (ТРЕЩИН)

Рассмотрим изотропную пологую сферическую оболочку толщиной $2h$. Пусть оболочка имеет N прямолинейных в плане произвольным образом расположенных параллельных сквозных трещин (разрезов) длиной $2l_k$ ($k = \overline{1, N}$). Предположим, что оболочка находится под действием внешней нагрузки, а к берегам разрезов приложены самоуравновешенные усилия и моменты. Считаем, что в процессе деформации оболочки при заданной нагрузке берега разрезов не контактируют.

Отнесем срединную поверхность оболочки к прямоугольной декартовой системе координат xOy, причем ось Ox направим параллельно линиям расположения разрезов. На каждом разрезе введем локальную систему координат $x_kO_ky_k$, начало которой совместим с центром разреза, а ось O_kx_k направим по линии разреза. Центры разрезов в базисной системе координат xOy имеют координаты (x_k^0, y_k^0), а оси O_kx_k образуют с осью Ox углы $\beta_k = 0$ или $\beta_k = \pi$. Напряженное состояние рассматриваемой оболочки можно представить в виде суммы напряженного состояния, вызванного внешней нагрузкой в оболочке без разрезов, и возмущенного, вызванного наличием разрезов (трещин). Задача сводится к нахождению возмущенного напряженного состояния, так как напряженное состояние сплошной оболочки определяется известными методами.

Используя предложенный в работах [3, 4] метод решения задач теории тонких оболочек с трещинами, для определения возмущенного напряженного состояния пологой сферической оболочки [1] с одной трещиной $|x_k| \leqslant l_k$, $y_k = 0$ получаем разрушающую систему дифференциальных уравнений относительно функций $\varphi_k(x_k, y_k)$ и $w_k(x_k, y_k)$:

$$\begin{gathered}\nabla^2\nabla^2\varphi_k - \frac{D_0}{R}\nabla^2 w_k = -D_0(\nabla_1^2\varepsilon_{22}^0 - \nabla_1\nabla_2\varepsilon_{12}^0),\\ \nabla^2\nabla^2 w_k + \frac{1}{DR}\nabla^2\varphi_k = -(\nu\nabla_1^2 + \nabla_2^2)\varkappa_{22}^0 - 2(1-\nu)\nabla_1\nabla_2\varkappa_{12}^0.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь

$$\nabla^2 = \nabla_1^2 + \nabla_2^2; \quad \nabla_1 = \frac{\partial}{\partial x_k}; \quad \nabla_2 = \frac{\partial}{\partial y_k}; \quad D_0 = 2Eh; \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)};$$

E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона; R — радиус срединной поверхности оболочки; ε_{ij}^0, $\varkappa_{ij}^0$ — компоненты тензора дисторсии, характеризующие скачки перемещений и угла поворота на линии разреза и выражающиеся формулами

$$\begin{gathered}\varepsilon_{22}^0(x_k, y_k) = \varepsilon_{2k}(x_k)\delta(y_k), \quad \varepsilon_{12}^0(x_k, y_k) = \varepsilon_{3k}(x_k)\delta(y_k),\\ \varkappa_{22}^0(x_k, y_k) = \varkappa_{2k}(x_k)\delta(y_k) + \varkappa_{4k}(x_k)\nabla_2\delta(y_k),\\ \varkappa_{12}^0(x_k, y_k) = \nabla_1\varkappa_{4k}(x_k)\delta(y_k),\end{gathered} \tag{2}$$