решение $u(t, x)$. Противоположная ситуация возникает в случае аналитической нелинейности: в работе [1] найден большой запас периодических по t решений.

Развитые методы применимы к уравнению (1) в ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$: для любого $f \in B^{p'}$ ($\mathbf{R} \cdot L^{p'}(\Omega)$) существует такое решение $u \in B^p$ (B; $L^p(\Omega)$) уравнения (1), что $u|_{\partial\Omega} = 0$. Обычные методы отыскания почти-периодических решений [2, 9], основанные на соображениях компактности, в этой ситуации неприменимы.

1. *Вишик М. И., Фурсиков А. В.* Задача Коши для нелинейного уравнения типа уравнения Шредингера.— Мат. сб., 1975, **96**, с. 458—470.
2. *Жиков В. В., Левитан Б. М.* Теория Фавара.— Успехи мат. наук, 1977, **32**, № 2, с. 123—171.
3. *Лионс Ж. Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М. : Мир, 1972.— 587 с.
4. *Панков А. А.* О почти периодических решениях эволюционных вариационных неравенств.— Докл. АН СССР, 1978, **241**, с. 286—289.
5. *Панков А. А.* Ограниченные и почти периодические решения эволюционных вариационных неравенств.— Мат. сб., 1979, **108**, с. 551—566.
6. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ.— М. : Наука: Мир, 1975.— Т. 1. 654 с.; Т. 2. 901 с.
7. *Шубин М. А.* Дифференциальные и псевдодифференциальные операторы в пространствах почти-периодических функций.— Мат. сб., 1974, **95**, с. 560—584.
8. *Шубин М. А.* Почти-периодические функции и дифференциальные операторы с частными производными.— Успехи мат. наук, 1978, **33**, № 2, с. 3—47.
9. *Amerio L., Prouse G.* Almost periodic functions and functional equations.— New York.: Van Nostrand Publ., 1971.— 183 p.
10. *Bardos C., Brezis H.* Sur une classe de problèmes d'évolution non linéaires.— J. Different. Equat., 1969, **6**, p. 345—394.
11. *Brezis H.* Problèmes unilatéraux.— J. math. pures et appl., 1972, **51**, p. 1—168.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 22.10.79

УДК 621.315 : 592.2

В. Ф. Чекурин

УРАВНЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ДЕФОРМИРУЕМЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ. ДИФФУЗИОННАЯ МОДЕЛЬ

В работах [2, 7] на основе многоконтинуумных представлений [3, 5] построена динамическая модель полупроводника для описания процессов деформации, тепло- и электропроводности, поляризации, а также генерации и рекомбинации электронов и дырок. Модель представлена в виде трех взаимопроникающих взаимодействующих континуумов — электронов, дырок и кристаллической решетки, для каждого из которых постулируется локальное термодинамическое равновесие при неравновесном состоянии макроэлемента полупроводника в целом. Однако в ряде случаев можно говорить о совпадении температур электронного и дырочного газов с температурой кристаллической решетки. При этом протекание указанных процессов может быть описано диффузионной моделью. Пример построения такой модели деформируемого, тепло- и электропроводного полупроводника можно найти в работе [1].

В настоящей работе при построении диффузионной модели полупроводника для описания процессов деформации, теплопроводности и электропроводности в качестве исходных термодинамических соотношений примем условия локального равновесия для каждой из трех подсистем полупроводника в том виде, в каком они постулируются в динамической модели [7]. Если пренебречь массой электронов по сравнению с массой кристаллической решетки, давлением электронной и дырочной подсистем, а также влиянием процессов генерации и рекомбинации на состояние кристаллической решетки, то указанные соотношения можно записать в виде (суммирование по индексам, заключенным в скобки, не производится)

$$\begin{aligned} &\frac{d_{(\alpha)}u_{(\alpha)}}{d\tau} = T_{(\alpha)}\frac{d_{(\alpha)}s_{(\alpha)}}{d\tau} \pm \eta_{(\alpha)}\frac{d_{(\alpha)}c_{(\alpha)}}{d\tau} \quad (\alpha = n,\ p), \\ &\frac{d_{(\alpha)}u_{(\alpha)}}{d\tau} = T_{(\alpha)}\frac{d_{(\alpha)}s_{(\alpha)}}{d\tau} + \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}\frac{d_{(\alpha)}e_{ij}}{d\tau} \quad (\alpha = s), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\frac{d_{(\alpha)}}{d\tau} \equiv \frac{\partial}{\partial\tau} + \overline{V}_{(\alpha)}\cdot\mathrm{grad}$; $\overline{V}_{(\alpha)}$ — скорость макроскопического движения частиц α-континуума; $u_{(\alpha)}$ — удельная (на единицу массы полупроводника) внутренняя энергия α-континуума; $T_{(\alpha)}$ и $s_{(\alpha)}$ — соответственно температура и удельная энтропия α-континуума; $\eta_{(\alpha)}$ — электрохимический потенциал электронов и дырок; $c_{(\alpha)} \equiv n_{(\alpha)}/\rho$ ($\alpha = n,\ p$); $n_{(\alpha)}$ — плотность электронов ($\alpha = n$) и дырок ($\alpha = p$); ρ — плотность масс полупроводника; σ_{ij} и e_{ij} — соответственно компоненты тензоров внутренних напряжений $\hat{\sigma} = \{\sigma_{ij}\}$ и деформаций $\hat{e} = \{e_{ij}\}$ континуума кристаллической решетки; n, p, s — индексы, относящиеся соответственно к электронному, дырочному и решеточному континуумам; τ — время.

Вводя оператор

$$\frac{d}{d\tau} \equiv \frac{\partial}{\partial\tau} + \overline{V}\cdot\mathrm{grad}, \tag{2}$$

где $\overline{V}$ — скорость центра масс макроэлемента полупроводника, и полагая $T_{(n)} = T_{(p)} = T_{(s)} \equiv T$, из соотношений (1) получаем

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} = {} & T\frac{ds}{d\tau} + \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}\frac{de_{ij}}{d\tau} + \eta_{(n)}\frac{dc_{(n)}}{d\tau} - \eta_{(p)}\frac{dc_{(p)}}{d\tau} + \\ & + T\sum_{\alpha}(\overline{V}_{(\alpha)} - \overline{V})\cdot\mathrm{grad}\,s_{(\alpha)} - \sum(\overline{V}_{(\alpha)} - \overline{V})\cdot\mathrm{grad}\,u_{(\alpha)} + \eta_{(n)}(\overline{V}^{(n)} - \\ & - \overline{V})\cdot\mathrm{grad}\,c_{(n)} - \eta_{(p)}(\overline{V}_{(p)} - \overline{V})\cdot\mathrm{grad}\,c_{(p)} + \frac{1}{\rho}(\overline{V}_{(s)} - \overline{V})\cdot\sigma_{ij}\,\mathrm{grad}\,e_{ij}. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь

$$u = \sum_{\alpha} u_{(\alpha)}; \quad s = \sum_{\alpha} s_{(\alpha)}.$$

Условие локального равновесия

$$\frac{du}{d\tau} = T\frac{ds}{d\tau} + \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}\frac{de_{ij}}{d\tau} + \eta_{(n)}\frac{dc_{(n)}}{d\tau} - \eta_{(p)}\frac{dc_{(p)}}{d\tau}, \tag{4}$$

обычно постулируемое при построении диффузионных моделей электропроводных твердых тел [6], следует из выражения (3) при условии, что

$$\begin{aligned} & T\sum_{\alpha}(\overline{V}_{(\alpha)} - \overline{V})\cdot\mathrm{grad}\,s_{(\alpha)} - \sum_{\alpha}(\overline{V}_{(\alpha)} - \overline{V})\cdot\mathrm{grad}\,u_{(\alpha)} + \eta_{(n)}(\overline{V}_{(n)} - \overline{V})\cdot\mathrm{grad}\,c_{(n)} - \\ & - \eta_{(p)}(\overline{V}_{(p)} - V)\cdot\mathrm{grad}\,c_{(p)} + \frac{1}{\rho}(\overline{V}_{(s)} - \overline{V})\cdot\sigma_{ij}\,\mathrm{grad}\,e_{ij} \approx 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Отсюда следует, что область применения диффузионной модели ограничивается случаями, когда выполняется соотношение (5).

Используя преобразование Лежандра, введем новую функцию состояния — свободную энергию $F = u - Ts$. Тогда уравнения состояния можно записать в виде

$$\begin{aligned} & s = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{e_{ij}, c_{(n)}, c_{(p)}}, \quad \sigma_{ij} = \rho\left(\frac{\partial F}{\partial e_{ij}}\right)_{T, c_{(n)}, c_{(p)}}, \\ & \eta_{(n)} = \left(\frac{\partial F}{\partial c_{(n)}}\right)_{T, e_{ij}, c_{(p)}}, \quad \eta_{(p)} = -\left(\frac{\partial F}{\partial c_{(p)}}\right)_{T, e_{ij}, c_{(n)}}. \end{aligned} \tag{6}$$

Дальнейшая конкретизация уравнений состояния требует установления определенной аналитической структуры свободной энергии $F(T, e_{ij}, c_{(n)}, c_{(p)})$, что может быть достигнуто, например, разложением в ряд этой функции [6, 7] либо с помощью методов статистической механики.

Уравнения баланса электронов и дырок с учетом протекания процессов генерации и рекомбинации и уравнение баланса массы полупроводника запишутся в виде

$$\frac{\partial n_{(\alpha)}}{\partial \tau} = -\operatorname{div} n_{(\alpha)}\bar{V}_{(\alpha)} + \Gamma \quad (\alpha = n, p), \quad \frac{\partial \rho}{\partial \tau} = -\operatorname{div} \rho\bar{V}. \tag{7}$$

Здесь Γ — скорость производства электронов и дырок в единице объема полупроводника. Из уравнений (7) следует уравнение баланса для концентрации электронов и дырок:

$$\frac{dc_{(\alpha)}}{d\tau} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{div} n_{(\alpha)}(\bar{V}_{(\alpha)} - \bar{V}) + \frac{\Gamma}{\rho} \quad (\alpha = n, p). \tag{8}$$

Определив плотность заряда электронной и дырочной подсистем

$$q_{(n)} = -q_0 n_{(n)}, \quad q_{(p)} = q_0 n_{(p)}, \tag{9}$$

где q_0 — величина заряда электрона, запишем уравнение движения для полупроводника при наличии электромагнитного поля в виде [4]

$$\rho\frac{d\bar{V}}{d\tau} = \operatorname{Div}\hat{\sigma} + \sum_{\alpha=n,p} q_{(\alpha)}(\bar{E} + \bar{V}_{(\alpha)} \times \bar{B}). \tag{10}$$

Здесь $\bar{E}$ и $\bar{B}$ — векторы напряженности электрического и индукции магнитного полей соответственно. Из уравнения (10) легко получить уравнение баланса кинетической энергии.

$$\frac{\partial}{d\tau}\left(\frac{1}{2}\rho\bar{V}^2\right) = -\operatorname{div}\left(\frac{1}{2}\rho\bar{V}^2\bar{V} - \hat{\sigma}\cdot\bar{V}\right) - \hat{\sigma} : \operatorname{Grad}\bar{V} + $$
$$+ \bar{V}\cdot\sum_{\alpha=n,p} q_{(\alpha)}(\bar{E} - \bar{V}_{(\alpha)} \times B). \tag{11}$$

Представим плотность полной энергии в виде суммы плотностей внутренней ρu, кинетической $\frac{1}{2}\rho\bar{V}^2$ энергий и плотности энергии электромагнитного поля $\frac{1}{2}(\varepsilon_0\bar{E}^2 + \mu_0\bar{H}^2)$, а поток полной энергии — в виде суммы конвективного члена $\left(\rho u + \frac{1}{2}\rho\bar{V}^2\right)\bar{V}$, потока тепла $\bar{J}_{(Q)}$, потока электромагнитной энергии $\bar{E} \times \bar{H}$, потока энергии $(-\sigma\cdot\bar{V})$, обусловленного механической работой, потока энергии $\frac{1}{q_0}\sum_{\alpha=n,p}\eta_{(\alpha)}\bar{j}_{(\alpha)}$, обусловленного диффузией носителей зарядов в поле их химических потенциалов. Тогда, используя закон сохранения полной энергии, уравнение баланса энергии для электромагнитного поля, которое следует из уравнений Максвелла, и уравнение (11), приходим к уравнению баланса внутренней энергии полупроводника

$$\rho\frac{du}{d\tau} = -\operatorname{div}\left(\bar{J}_{(Q)} + \frac{1}{q_0}\sum_{\alpha=n,p}\eta_{(\alpha)}\bar{j}_{(\alpha)}\right) + \sigma_{ij}\frac{de_{ij}}{d\tau} + \sum_{\alpha=n,p}\bar{j}_{(\alpha)}\cdot(\bar{E} + \bar{V} \times \bar{B}), \tag{12}$$

$$\bar{j}_{(\alpha)} \equiv q_{(\alpha)}(\bar{V}_{(\alpha)} - \bar{V}).$$

Из уравнений (4), (8) и (12) следует уравнение баланса энтропии

$$\rho\frac{ds}{d\tau} = -\operatorname{div}\bar{J}_{(s)} + \frac{1}{T}(\bar{J}_{(Q)}\cdot\bar{X}_{(Q)} + \bar{j}_{(n)}\cdot\bar{X}_{(n)} + \bar{j}_{(p)}\cdot\bar{X}_{(p)} + \Gamma X_\Gamma), \tag{13}$$

где

$$\bar{J}_{(s)} \equiv \frac{\bar{J}_{(Q)}}{T}; \quad \bar{X}_{(Q)} \equiv -\frac{\operatorname{grad} T}{T};$$

$$\bar{X}_{(\alpha)} \equiv \frac{T}{q_0}\operatorname{grad}\frac{\eta_{(\alpha)}}{T} + \bar{E} + \bar{V} \times \bar{B} \quad (\alpha = n, p); \quad X_\Gamma \equiv -(\eta_{(n)} - \eta_{(p)}). \tag{14}$$

В случае изотропного полупроводника при малых отклонениях от равновесия термодинамические потоки $\bar{J}_{(Q)}$, $\bar{j}_{(\alpha)}$ $(\alpha = n, p)$, Γ и термодинамические силы $\bar{X}_{(Q)}$, $\bar{X}_{(\alpha)}$ $(\alpha = n, p)$, X_Γ связаны линейными соотношениями

$$\bar{J}_{(Q)} = L_{(QQ)}\bar{X}_{(Q)} + \sum_{\beta=n,p} L_{(Q\beta)}\bar{X}_{(\beta)},$$

$$\bar{j}_{(\alpha)} = \sum_{\beta=n,p} L_{(\alpha\beta)}\bar{X}_{(\beta)} + L_{(\alpha Q)}\bar{X}_{(Q)} \quad (\alpha = n, p), \tag{15}$$

$$\Gamma = L_\Gamma X_\Gamma,$$

где $L_{(QQ)}$, $L_{(Q\alpha)}$, $L_{(\alpha\beta)}$, $L_{(\alpha Q)}$ $(\alpha, \beta = n, p)$, L_Γ — кинетические коэффициенты.

Отметим, что при соответствующих предположениях соотношения (15) следуют непосредственно из системы уравнений динамической модели.

Уравнения (6), (7), (10), (15) вместе с уравнениями совместности деформаций и уравнениями Максвелла для электромагнитного поля составляют замкнутую систему уравнений, которая может быть использована для описания во взаимосвязи процессов деформации, теплопроводности, электропроводности, а также генерации и рекомбинации свободных электронов и дырок в полупроводниковых телах с собственной проводимостью.

1. *Бурак Я. Й., Галапац Б. П., Гнідець Б. М.* Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах.— К. : Наук. думка, 1978.— 230 с.
2. *Бурак Я. Й., Чекурин В. Ф.* Термодинамическая модель собственного полупроводника.— В кн.: IX Совещ. по теории полупроводников (Тбилиси, 24—26 окт. 1978 г.) : Тез. докл. Тбилиси : Изд-во Тбил. ун-та, 1978, с. 77—78.
3. *Гогосов В. В., Налетова В. А., Шапошникова Г. А.* Об одной модели многофазной среды.— Докл. АН СССР, 1977, 236, № 5, с. 1098—1101.
4. *Гроот С. де, Мазур П.* Неравновесная термодинамика.— М. : Мир, 1964.— 456 с.
5. *Нигматулин Р. И.* Методы механики сплошной среды для описания многофазных смесей.— ПММ, 1970, 34, № 6, 1097—1112.
6. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Галапац Б. П., Гнидец Б. М.* Исходные уравнения теории деформации электропроводных твердых растворов.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 1, с. 22—29.
7. *Чекурин В. Ф.* Уравнения состояния для трехконтинуумной модели собственного полупроводника.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 11, с. 67—71.

Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию 19.11.79

УДК 539.3 : 538.6

В. Ф. Кондрат, Т. С. Нагирный

МАГНИТОВЯЗКОУПРУГИЕ ВОЛНЫ В ЭЛЕКТРОПРОВОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Закономерности распространения синусоидальных волн в линейных упруговязких средах, описываемых различными реологическими моделями, изучены в работе [2]. В работе [8] исследовано распространение волны второй гармоники в нелинейной упруговязкой среде. В работе [10] изучены линейные магнитовязкоупругие волны в электропроводном полупространстве при внезапном силовом воздействии на его поверхность. В настоящей работе исследовано влияние постоянного магнитного поля на параметры волн первой и второй гармоник в электропроводном вязкоупругом полупространстве при гармоническом силовом воздействии на его поверхность в пределах модели нелинейной магнитовязкоупругой среды. Аналогичная задача для магнитотермоупругого полупространства рассмотрена в работе [1].

Рассмотрим электропроводное неферромагнитное вязкоупругое полупространство $x > 0$, помещенное в тангенциальное к его поверхности постоянное магнитное поле индукции $\vec{B}_0 = (0, 0, B_0)$. На поверхности