УДК 517.9

А. А. Панков

ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера

$$\frac{\partial u}{\partial t} - i\Delta u + \beta(|u|)u = f(t, x), \quad x \in \mathbf{R}^n \tag{1}$$

с монотонной нелинейностью, точнее, в предположении, что 1) $\beta(\lambda)\cdot\lambda$, $(\lambda \geqslant 0)$— непрерывная неубывающая функция, $\lim \beta(\lambda)\lambda = 0$ при $\lambda \to 0$; 2) для некоторого $p > 1$ и достаточно больших $\lambda \geqslant 0$

$$c_1\lambda^{p-2} \leqslant \beta(\lambda) \leqslant c_2\lambda^{p-2}, \quad c_1, c_2 > 0.$$

Наиболее интересен случай, когда $\beta(\lambda) = \lambda^{p-2}$. Уравнение (1) изучим в пространствах типа $B^p(\mathbf{R}^n, V)$ (V — банахово пространство) почти-периодических функций Безиковича. Определение и основные свойства таких пространств приведены в работах [4, 8]. Напомним, что для рефлексивного V и $p > 1$ пространство $B^p(\mathbf{R}^n, V)$ рефлексивно и

$$[B^p(\mathbf{R}^n, V)]' = B^{p'}(\mathbf{R}^n, V'), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \tag{2}$$

где двойственность задана формулой $(u, v)_B = \mathbf{M}\{(u, v)\}$, $\mathbf{M}\{\varphi\}$ — среднее значение почти-периодической функции φ; (u, v) — двойственность между V' и V.

Линейные дифференциальные операторы распространяются на пространства почти-периодических функций по двойственности (см. [7]):

$$(Lu, v)_B = (u, L^+v)_B, \quad v \in \mathrm{Trig}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}).$$

Здесь L^+ — формально сопряженный к L оператор, а $\mathrm{Trig}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ — пространство тригонометрических полиномов вида

$$v(x) = \sum a_k \exp i\xi_k x, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad \xi_k \in \mathbf{R}^n, \quad a_k \in \mathbf{C}.$$

Теорема 1. В предположениях 1) и 2) для любого $f \in B^{p'}(\mathbf{R}^{n+1})$ уравнение (1) имеет решение $u \in B^p(\mathbf{R}^{n+1})$. Если при этом функция $\beta(\lambda)\cdot\lambda$ строго монотонна ($\lambda \geqslant 0$), то полученное решение единственно.

Доказательство. Уравнение (1) запишем в операторной форме

$$Lu + A(u) = f,$$

где

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - i\Delta;$$

$$D(L) = \{v \in B^p(\mathbf{R}^{n+1}) \mid Lv \in B^{p'}(\mathbf{R}^{n+1})\};$$

$$A(v) = \beta(|v|)\cdot v, \quad v \in B^p(\mathbf{R}^{n+1}).$$

Как и в работе [4], из условий 1) и 2) и структуры боровских компактов [6] вытекает, что оператор A отображает $B^p(\mathbf{R}^{n+1})$ в $B^{p'}(\mathbf{R}^{n+1})$ и является непрерывным, монотонным и коэрцитивным (в смысле работы [3]).

Оператор L кососамосопряжен, т. е.

$$L^* = -L. \tag{3}$$

На элементах $v \in \mathrm{Trig}(\mathbf{R}^{n+1})$ это равенство вытекает из предложения 1.1 работы [7]. Остается показать, что

$$D(L) = D(L^*). \tag{4}$$

По определению L является слабым расширением оператора

$$\frac{\partial}{\partial t} - i\Delta : \mathrm{Trig}\,(\mathbf{R}^{n+1}) \to B^{p'}(\mathbf{R}^{n+1}).$$

Следовательно, L^*— сильное расширение оператора

$$-\frac{\partial}{\partial t} + i\Delta : \mathrm{Trig}\,(\mathbf{R}^{n+1}) \to B^{p'}(\mathbf{R}^{n+1})$$

и $\mathrm{Trig}\,(\mathbf{R}^{n+1})$ плотно в $D\,(L^*)$ по норме графика. Теперь равенство (4) получается из плотности $\mathrm{Trig}\,(\mathbf{R}^{n+1})$ в $D\,(L)$ по норме графика. Для доказательства последнего утверждения воспользуемся аппроксимациями Бохнера — Фейера в форме, приведенной в работе [8]. Пусть $\{\varphi_\alpha\}$ — сеть ядер Бохнера — Фейера. Определяем операторы P_α, полагая

$$P_\alpha u = \varphi_\alpha * u, \quad u \in B^1(\mathbf{R}^{n+1}),$$

где свертка берется на группе $\mathbf{R}_B^{n+1}$ [6, 8]. Из δ-образности ядер $\{\varphi_\alpha\}$ стандартным образом вытекают следующие утверждения.

I. $\mathrm{Im}\,P_\alpha \subset \mathrm{Trig}\,(\mathbf{R}^{n+1})$;

II. Для любого $q > 1$ операторы P_α равномерно ограничены по норме пространства $B^q\,(\mathbf{R}^{n+1})$;

III. $\lim P_\alpha u = u$ по норме пространства $B^q\,(\mathbf{R}^{n+1})$. Кроме того, на $\mathrm{Trig}\,(\mathbf{R}^{n+1})$ операторы Бохнера—Фейера коммутируют со всеми дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами. Далее, для $u \in D\,(L)$ получаем

$$(P_\alpha Lu, v)_B = (u, L^+ P_\alpha v)_B = (u, P_\alpha L^+ v)_B = (LP_\alpha u, v)_B,$$

т. е. операторы P_α коммутируют с L на $D\,(L)$. Отсюда и из свойств I—III операторов P_α вытекает, что $\lim P_\alpha u = u$, $u \in D\,(L)$ по норме графика, и соотношение (4) доказано.

Для доказательства теоремы 1 достаточно теперь сослаться на теорему 1.1 работы [3].

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1) в классе почти-периодических по $x \in \mathbf{R}^n$ функций.

Теорема 2. Пусть $f \in L^{p'}(0, T; B^{p'}(\mathbf{R}^n))$ ($T > 0$ — произвольное) и $u_0 \in B^2(\mathbf{R}^n)$. Тогда существует решение $u \in L^p(0, T; B^p(\mathbf{R}^n)) \cap C([0, T]; B^2(\mathbf{R}^n))$ уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$u(0) = u_0. \tag{5}$$

Доказательство. Положим $V = L^p(0, T; B^p(\mathbf{R}^n))$ и определим оператор L равенствами

$$Lv = \frac{\partial v}{\partial t} - i\Delta v,$$

$$D(L) = \{v \in V \mid Lv \in V',\ v(0) = 0\}.$$

Нетрудно показать (ср. с [10]), что из $v \in V$, $Lv \in V'$ вытекает, что $v \in C([0, T]; B^2(\mathbf{R}^n))$ и предыдущее определение имеет смысл. Оператор A определяется той же формулой, что и выше, и является монотонным семинепрерывным коэрцитивным оператором из V в V' (ср. с [4]).

Покажем, что L — максимальный монотонный оператор (тогда теорема 2 будет следовать из абстрактных результатов [10]). Положим

$$D_0(L) = \{v \in C^\infty([0, T]; \mathrm{Trig}\,(\mathbf{R}^n)) \mid v(0, x) = 0\}$$

и докажем, что $D_0(L)$ плотно в $D\,(L)$ по норме графика. Используя операторы Бохнера — Фейера по переменной $x \in \mathbf{R}^n$, можно аппроксимировать функцию $v \in D\,(L)$ тригонометрическими полиномами

$$\sum a_k(t) \exp i\xi_k x,$$

где $a_k \in L^p(0, T)$; $a_k' \in L^{p'}(0, T)$; $a_k(0) = 0$. Стандартная регуляризация функций $a_k(t)$ по t показывает, что $D_0(L)$ плотно в $D(L)$ по норме графика.

Определим оператор M равенствами

$$Mv = -\frac{\partial v}{\partial t} + i\Delta v, \quad v \in D(M),$$
$$D(M) = \{v \in V \mid Mv \in V', \ v(T) = 0\}.$$

Как и ранее, пространство $\{v \in C^\infty([0, T], \mathrm{Trig}(\mathbf{R}^n))\, v(T) = 0\}$ плотно в $D(M)$ по норме графика. Кроме того,

$$(Lv, w) = (v, Mw), \quad v \in D(L), \quad w \in D(M).$$

Теперь стандартным образом проверяем (см. [3]), что $L \geqslant 0$ — замкнутый оператор и $L^* = M \geqslant 0$.

Дополним теорему 2 изучением поведения решений задачи Коши при $t \to +\infty$.

Теорема 3. Пусть $u_1(t)$, $u_2(t)$ $(t \geqslant 0)$ — два решения уравнения (1), $u_1, u_2 \in L^p(0, T; B^p(\mathbf{R}^n)) \cap C([0, T]; B^2(\mathbf{R}^n))$ для любого $T > 0$ с общей правой частью. Тогда $\varphi(t) = \| u_1(t) - u_2(t)\|_{B^2}$ является невозрастающей функцией. Если, кроме того, выполнена оценка

$$(\beta(\lambda_1)\lambda_1 - \beta(\lambda_2)\lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2) \geqslant \begin{cases} \alpha|\lambda_1 - \lambda_2|^p, & p \geqslant 2, \\ \alpha|\lambda_1 - \lambda_2|^2(1 + \lambda_1 + \lambda_2)^{p-2}, & p < 2 \end{cases} \tag{6}$$

для $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$, то выполняется включение

$$u_1 - u_2 \in L^p(0, +\infty; B^p(\mathbf{R}^n)). \tag{7}$$

При $p \geqslant 2$ имеем также $\lim \varphi(t) = 0$ при $t \to +\infty$.

Доказательство. Для любых $0 \leqslant t_0 \leqslant t$ справедливо соотношение

$$\frac{1}{2}[\varphi^2(t) - \varphi^2(t_0)] + \int_{t_0}^{t} (A(u_1(\tau)) - A(u_2(\tau)), \ u_1(\tau) - u_2(\tau))_B \, d\tau = 0. \tag{8}$$

Действительно, подставим u_1 (соответственно u_2) в уравнение (1), и, умножив скалярно на u_2 (соответственно u_1), вычтем полученные равенства. Затем, проинтегрировав по отрезку $[t_0, t]$ и воспользовавшись косой самосопряженностью оператора $i\Delta$ и равенством

$$\int_{t_0}^{t} (v'(\tau), v(\tau))_B \, d\tau = \frac{1}{2}(\|v(t)\|^2_{B^2} - \|v(t_0)\|^2_{B^2}),$$

получим соотношение (8). На самом деле предыдущее рассуждение формально и имеет смысл только для достаточно регулярных u_1 и u_2, например для $u_1, u_2 \in D_0(L)$. В общем случае требуется некоторый предельный переход, обоснованный, по сути, в конце доказательства теоремы 2.

Первое утверждение теоремы 3 вытекает из равенства (8) и монотонности оператора A.

Пусть выполняется оценка (6) и для определенности $p \geqslant 2$. Тогда из соотношений (6) и (8) получаем

$$\frac{1}{2}[\varphi^2(t) - \varphi^2(t_0)] + \alpha \int_{t_0}^{t} \| u_1(\tau) - u_2(\tau)\|^p_{B^p} \, d\tau \leqslant 0.$$

Отсюда сразу получаем включение (7). В случае $p \geqslant 2$ имеем вложение $B^p \subset B^2$. Теперь из включения (7) и монотонности функции $\varphi(t)$ вытекает, что $\lim \varphi(t) = 0$. Случай $p < 2$ рассматривается аналогично с незначительными модификациями (ср. с [5]).

Теоремы 1 и 3 показывают, что для $f \in B^{p'}(\mathbf{R}^{n+1})$ решение задачи (1), (5) при $t \to +\infty$ ведет себя так же, как некоторое почти-периодическое решение $u(t, x)$. Противоположная ситуация возникает в случае аналитической нелинейности: в работе [1] найден большой запас периодических по t решений.

Развитые методы применимы к уравнению (1) в ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$: для любого $f \in B^{p'}(\mathbf{R} \cdot L^{p'}(\Omega)$ существует такое решение $u \in B^p(B; L^p(\Omega))$ уравнения (1), что $u_{|\partial\Omega} = 0$. Обычные методы отыскания почти-периодических решений [2, 9], основанные на соображениях компактности, в этой ситуации неприменимы.

1. *Вишик М. И., Фурсиков А. В.* Задача Коши для нелинейного уравнения типа уравнения Шредингера.— Мат. сб., 1975, **96**, с. 458—470.
2. *Жиков В. В., Левитан Б. М.* Теория Фавара.— Успехи мат. наук, 1977, **32**, № 2, с. 123—171.
3. *Лионс Ж. Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М. : Мир, 1972.— 587 с.
4. *Панков А. А.* О почти периодических решениях эволюционных вариационных неравенств.— Докл. АН СССР, 1978, **241**, с. 286—289.
5. *Панков А. А.* Ограниченные и почти периодические решения эволюционных вариационных неравенств.— Мат. сб., 1979, **108**, с. 551—566.
6. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ.— М. : Наука: Мир, 1975.— Т. 1. 654 с.; Т. 2. 901 с.
7. *Шубин М. А.* Дифференциальные и псевдодифференциальные операторы в пространствах почти-периодических функций.— Мат. сб., 1974, **95**, с. 560—584.
8. *Шубин М. А.* Почти-периодические функции и дифференциальные операторы с частными производными.— Успехи мат. наук, 1978, **33**, № 2, с. 3—47.
9. *Amerio L., Prouse G.* Almost periodic functions and functional equations.— New York.: Van Nostrand Publ., 1971.— 183 p.
10. *Bardos C., Brezis H.* Sur une classe de problèmes d'évolution non linéaires.— J. Different. Equat., 1969, **6**, p. 345—394.
11. *Brezis H.* Problèmes unilatéraux.— J. math. pures et appl., 1972, **51**, p. 1—168.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 22.10.79

УДК 621.315 : 592.2

В. Ф. Чекурин

УРАВНЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ДЕФОРМИРУЕМЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ. ДИФФУЗИОННАЯ МОДЕЛЬ

В работах [2, 7] на основе многоконтинуумных представлений [3, 5] построена динамическая модель полупроводника для описания процессов деформации, тепло- и электропроводности, поляризации, а также генерации и рекомбинации электронов и дырок. Модель представлена в виде трех взаимопроникающих взаимодействующих континуумов — электронов, дырок и кристаллической решетки, для каждого из которых постулируется локальное термодинамическое равновесие при неравновесном состоянии макроэлемента полупроводника в целом. Однако в ряде случаев можно говорить о совпадении температур электронного и дырочного газов с температурой кристаллической решетки. При этом протекание указанных процессов может быть описано диффузионной моделью. Пример построения такой модели деформируемого, тепло- и электропроводного полупроводника можно найти в работе [1].

В настоящей работе при построении диффузионной модели полупроводника для описания процессов деформации, теплопроводности и электропроводности в качестве исходных термодинамических соотношений примем условия локального равновесия для каждой из трех подсистем полупроводника в том виде, в каком они постулируются в динамической модели [7]. Если пренебречь массой электронов по сравнению с массой кристаллической решетки, давлением электронной и дырочной подсистем, а также влиянием