Рассмотрим вычислительную формулу

$$y_{n+1} = \frac{b_0 + b_1 h + \cdots + b_k h^k}{\alpha_0 + \sum\limits_{j=1}^{l} \alpha_j \prod\limits_{i=1}^{k+l} \left(\frac{d_i y_n - hF_n}{y_n + \beta_i h F_n} \right)} + O(h^{k+1}) \tag{14}$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots; \quad l = 0, 1, 2, \ldots),$$

где коэффициенты $b_0, b_1, \ldots, b_k$ определяются из соответствующих условий аппроксимации; α_j, d_i, β_i — свободные параметры, а

$$F_n = \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu k_\nu, \quad m = 1, 2, 3, \ldots;$$

$$k_1 = f(x_n y_n); \quad k_\mu = f\left(x_n + p_\mu h,\ y_n + h \sum_{j=1}^{\mu-1} g_{\mu j} k_j\right),$$

$$\mu = 2, 3, \ldots, m;$$

p_μ и $g_{\mu j}$ — коэффициенты соответствующих линейных классических методов типа Рунге — Кутта. Среди множества вычислительных методов, которые описываются этой формулой, находятся A-устойчивые, L-устойчивые и жестко устойчивые [2] методы численного интегрирования дифференциальных уравнений.

1. *Хованский А. Н.* Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа.— М. : Гостехиздат, 1956.— 203 с.
2. *Холл Дж., Уатт Дж.* Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Мир, 1979.— 312 с.
3. *Dahlquist G.* A special stability problem for linear multistep methods.— BIT, 1963, 3, p. 27—43.
4. *Wall H. S.* Analitic theory of continued fractions.— Toronto etc. : Van Nostrand, 1948.— 433 p.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 19.11.79

УДК 534.1 : 531.221.3

Р. М. Таций

О СОЧЕТАНИИ МЕТОДОВ РИТЦА И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ РЯДОВ В САМОСОПРЯЖЕННЫХ ПОЛНОСТЬЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ЗАДАЧАХ МНОГОЧЛЕННОГО КЛАССА

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$M[y] = \lambda N[y], \tag{1}$$

$$U_\mu[y] = 0, \quad \mu = 1, 2, \ldots, m, \tag{2}$$

где M, N — линейные однородные дифференциальные выражения порядков m и n ($m > n$) соответственно; U_μ — линейные однородные дифференциальные формы относительно значений функции y и ее производных до (m — 1)-го порядка в двух фиксированных точках $x = a$ и $x = b$.

Пусть задача (1), (2) является самосопряженной и полностью определенной. Это значит [2], что для любых функций сравнения u, v, удовлетворяющих краевым условиям (2) и m раз непрерывно дифференцируемых, справедливы условия самосопряженности

$$\begin{gathered} \int_a^b (uM[v] - vM[u])\,dx = 0, \\ \int_a^b (uN[v] - vN[u])\,dx = 0 \end{gathered} \tag{3}$$

и полной определенности

$$\int_a^b uM[u]\,dx > 0,$$
$$\int_a^b uN[u]\,dx > 0. \tag{4}$$

При указанных предположениях частное Релея

$$R[u] = \frac{\int_a^b uM[u]\,dx}{\int_a^b uN[u]\,dx} \tag{5}$$

положительно, откуда следует положительность всех собственных значений задачи (1), (2). Как известно, к задаче (1), (2) сводятся многие практически важные задачи о колебаниях и устойчивости стержневых систем, а также некоторые многомерные задачи, допускающие разделение переменных и сводящиеся к одномерным.

Пусть характеристическое уравнение задачи (1), (2) имеет вид

$$\Delta(\lambda) = c_0 - c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \cdots + (-1)^k c_k\lambda^k + \cdots = 0. \tag{6}$$

Поскольку параметр λ не входит в краевые условия (2) и дифференциальные выражения M и N самосопряженные, то характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ (характеристический ряд) является целой функцией рода нуль [4]. Кроме того, его нули положительны. Для таких функций, как известно [1], существует определенная связь между нулями λ_i и коэффициентами c_k ряда (6). Так, если обозначить

$$B_\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-\nu}, \tag{7}$$

то величины B_ν однозначно определяются рекуррентными соотношениями

$$B_1 = \frac{c_1}{c_0}, \quad c_0 B_\nu = \sum_{k=1}^{\nu-1} (-1)^{k+1} c_k B_{\nu-k} + (-1)^{\nu+1}\nu c_\nu. \tag{8}$$

Покажем, что если известны несколько первых коэффициентов c_k характеристического ряда, то путем сочетания прямых вариационных методов с методом характеристических рядов можно строить последовательности двусторонних оценок его нулей (собственных значений задачи (1), (2)) аналогичные известным [3], причем предлагаемые оценки будут проще и без дополнительного ограничительного предположения о принадлежности рассматриваемой задачи к одночленному классу.

Определение. Самосопряженную и полностью определенную задачу на собственные значения

$$M^*[y] = \lambda N^*[y], \tag{9}$$
$$U_\mu^*[y] = 0 \tag{10}$$

будем называть близкой к задаче (1), (2), если собственные значения ее известны и, кроме того, для любой функции сравнения u выполняется неравенство

$$R[u] \leqslant R^*[u], \tag{11}$$

где $R^*[u]$ — частное Релея задачи (9), (10). В качестве близкой может быть выбрана любая решаемая в замкнутом виде задача при соблюдении условия (11).

Приближения сверху к собственному значению рассматриваемой задачи можно получать, например, методом Ритца. Для получения соответствующих последовательностей оценок снизу предположим, что известны коэффициенты $c_0, \ldots, c_\nu$ функции $\Delta(\lambda)$, и построим по ним величину B_ν. Введем следующие обозначения: λ_i — i-е собственное значение задачи (1), (2), λ_{in} — n-е приближение к λ_i по Ритцу, λ_{i0} — i-е собственное значение близкой задачи,

$$B_{\nu 0} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{i0}^{-\nu}, \quad B_{\nu n} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{in}^{-\nu}, \quad r_{\nu n} = B_{\nu 0} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i0}^{-\nu}.$$

Условимся считать $\lambda_{i0} \geqslant \lambda_{in}$. Если при практическом решении это условие не выполняется, то полагаем $\lambda_{in} \equiv \lambda_{i0}$. При этих предположениях справедлива такая теорема.

Теорема. Последовательность

$$\left\{ T_{kn} \equiv \left(B_\nu - B_{\nu n} - r_{\nu n} + \lambda_{kn}^{-\nu}\right)^{-\frac{1}{\nu}} \right\} \tag{12}$$

неубывающая и сходящаяся снизу к собственному значению λ_k.

Доказательство. Учитывая, что $\lambda_k \leqslant \lambda_{kn} \leqslant \lambda_{k0}$, записываем цепочку очевидных неравенств

$$\lambda_k^{-\nu} - \lambda_{kn}^{-\nu} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i^{-\nu} - \lambda_{in}^{-\nu}\right) = B_\nu - \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_r^{-\nu} - B_{\nu n} \leqslant B_\nu - B_{\nu n} - r_{\nu n}, \tag{13}$$

откуда следует, что

$$\lambda_k \geqslant \left(B_\nu - B_{\nu n} - r_{\nu n} + \lambda_{kn}^{-\nu}\right)^{-\frac{1}{\nu}}, \tag{14}$$

т. е. при произвольном k величина T_{kn} действительно является оценкой снизу для собственного значения λ_k.

Покажем, что последовательность $\{T_{kn}\}$ не убывает. Так как $\lambda_{in} \geqslant \lambda_{i,n+1}$, $\lambda_{i0} \geqslant \lambda_{in}$, то

$$T_{k,n+1}^{-\nu} - T_{kn}^{-\nu} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \left(\lambda_{in}^{-\nu} - \lambda_{i,n+1}^{-\nu}\right) + \left(\lambda_{n+1,0}^{-\nu} - \lambda_{n+1,n+1}^{-\nu}\right) \leqslant 0.$$

Отсюда следует, что

$$T_{kn} \leqslant T_{k,n+1}. \tag{15}$$

Поскольку (см., например, работу [3]) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{nk} = \lambda_k$, $\lim\limits_{n\to\infty} B_{\nu n} = B_\nu$, а $\lim\limits_{n\to\infty} r_{\nu n} = 0$ как остаток сходящегося ряда, то $\lim\limits_{n\to\infty} T_{kn} = \lambda_k$, что и завершает доказательство теоремы.

Отметим, что при практическом построении оценок (14) быстрота сходимости увеличивается с увеличением индекса ν. Однако вследствие полной определенности задачи оценки собственных значений снизу могут быть получены даже с помощью величины B_1, что требует только вычисления определенных интегралов и раскрытия определителя.

Действительно, пусть краевые условия (2) имеют вид

$$U_\mu[y] \equiv \sum_{\nu=0}^{m-1} \left(a_{\nu\mu} y^{(\nu)}(a) + b_{\nu\mu} y^{(\nu)}(b)\right) = 0, \tag{16}$$

где $a_{\nu\mu}$, $b_{\nu\mu}$ — заданные вещественные не равные одновременно нулю постоянные. Пусть, далее, ψ_i, φ_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) — фундаментальные системы решений уравнения (1) и уравнения $M[y] = 0$ соответственно, а $K(x, \alpha)$ — решение задачи Коши в точке $x = \alpha$ для уравнения $M[y] = 0$ при начальных условиях

$$K_x^{(i)}(\alpha, \alpha) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, m-2, \quad K_x^{(m-1)}(\alpha, \alpha) = 1. \tag{17}$$

Тогда [5] с точностью до первой степени λ можно записать

$$U_\mu[\psi_i] = \sum_{\nu=0}^{m-1} \left\{ a_{\nu\mu}\varphi_i^{(\nu)}(a) + b_{\nu\mu}\varphi_i^{(\nu)}(b) + \lambda \left[a_{\nu\mu} \int_{x_0}^{a} K_x^{(\nu)}(a, \alpha) N[\varphi_i(\alpha)]\, d\alpha + \right.\right.$$

$$\left.\left. + b_{\nu\mu} \int_{x_0}^{b} K_x^{(\nu)}(b, \alpha) N[\varphi_i(\alpha)]\, d\alpha, \right.\right. \tag{18}$$

где x_0 — произвольная точка отрезка $[a, b]$. Поскольку c_1 — первый коэффициент характеристического ряда, то, очевидно,

$$B_1 = \left| \frac{\Delta' (U_\mu [\psi_i])}{\Delta (U_\mu [(\psi_i])} \right|_{\lambda=0}. \quad (19)$$

Если рассматриваемая задача принадлежит одночленному классу, то, как известно, она равносильна интегральному уравнению Фредгольма второго рода. В этом случае функция $\Delta (\lambda)$ с точностью до постоянного множителя тождественна знаменателю Фредгольма, а величина B_ν — следам ν-итерированных ядер указанного интегрального уравнения. Однако в общем случае (многочленный класс) способ сведения задачи (1), (2) к соответствующему интегральному уравнению, по-видимому, неизвестен.

Таким образом, применение метода характеристических рядов позволило распространить полученные, а также и известные двусторонние оценки собственных значений на задачи многочленного класса.

1. *Бернштейн С. А., Керопян К. К.* Определение частот колебаний стержневых систем методом спектральной функции.— М. : Госстройиздат, 1960.— 364 с.
2. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения.— М. : Наука, 1958.— 503 с.
3. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике.— М. : Гостехиздат, 1957.— 571 с.
4. *Таций Р. М.* Двусторонние оценки собственных значений в задачах о колебаниях и устойчивости упругих пластинок сложной формы : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Львов, 1978.— 20 с.
5. *Таций Р. М.* К построению характеристических рядов многопараметрических континуальных систем.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1976, № 9, с. 819—821.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
12.11.79

УДК 512.8

В. М. Петричкович

ВОПРОСЫ РАЗЛОЖИМОСТИ МАТРИЧНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

Рассмотрим вопросы разложения на множители унитальных матричных многочленов

$$A(x) = Ex^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_m,$$

где E — единичная матрица; A_i $(i = 1, \ldots, m)$ — $n \times n$-матрицы над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Установим существование абсолютно разложимых матричных многочленов, верхней и нижней границ для числа линейных делителей и числа различных разложений на линейные множители матричных многочленов, все характеристические корни которых различны; докажем, что матричный многочлен, все характеристические корни которого имеют кратности не больше двух, разложим в произведение линейных множителей, а также приведем некоторые условия разложимости на множители клеточно-диагональных, клеточно-треугольных матриц и матричных многочленов с коммутирующими коэффициентами.

Понятия эквивалентности и скалярной эквивалентности полиномиальных матриц определены в работах [1, 9]. Введем еще такое определение.

Определение 1. Пусть $A(x)$ и $B(x)$ — полиномиальные матрицы одинаковых размеров. Если существуют неособенная числовая матрица Q и обратимая матрица $R(x)$ такие, что $A(x) = QB(x) R(x)$, то матрицы $A(x)$ и $B(x)$ называются полускалярно эквивалентными.

Теорема 1 *. Пусть $A_1(x), \ldots, A_k(x)$ — неособенные $n \times n$-матрицы, $\varepsilon_{ij}(x)$, $j = 1, \ldots, n$ — инвариантные множители матрицы $A_i(x)$, $i = 1, \ldots, k$.

* Теорема получена совместно с П. С. Казимирским.