$k = 1, \ldots, r$, следует, что $V(x) = 0$, $x \in D_\nu$. Далее получаем

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) V(x) = 0, \quad x \in D_{m+1} \setminus \bar{D}_0, \quad \lim_{x \to y_0} V(x) = 0, \quad y_0 \in S_{m+1}, \quad y_0 \in S_0.$$

Поэтому $V(x) \equiv 0$, $x \in D_{m+1} \setminus \bar{D}_0$. Значит, $V(x) \equiv 0$, $x \in \bar{D}^{(r)}_{m+1}$, откуда вследствие непрерывности потенциала (17), а также формул (16), (11) и (13) получаем $\mu_1(y) \equiv 0$, $y \in S_k$, $k = 0, 1, \ldots, r$. Таким образом, задача (15) решается по первой теореме Фредгольма.

Теорема 2. Вторая смешанная граничная задача (1), (3), (5) однозначно разрешима и ее решение имеет вид (14); неизвестная плотность $\mu(y)$ однозначно определяется из системы регулярных уравнений (15).

Все сказанное выше переносится на случай систем дифференциальных уравнений вариационного типа с переменными коэффициентами

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) \equiv \sum_{k,l=1}^{n} A_{kl}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{n} A_k(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} + A(x) u(x) = 0$$

при условии существования для них во всем бесконечном пространстве фундаментальной матрицы.

1. *Бурчуладзе Т. В.* Тензоры Грина и их некоторые применения.— Тр. Груз. политехн. ин-та, 1963, № 8 (93), с. 87—119.
2. *Бурчуладзе Т. В.* Смешанные граничные задачи для некоторых эллиптических систем в многосвязных областях.— Тр. Тбил. мат. ин-та, 1967, 32, с. 29—53.
3. *Волошина М. С.* Розв'язок першої змішаної граничної задачі для одного класу сильно еліптичних систем у випадку багатозв'язаної області за допомогою матриці Гріна.— Вісн. Льв. політехн. ін-ту. Математика і механіка, 1977, № 119, с. 27—30.
4. *Волошина М. С.* Про деякі властивості одного класу сильно еліптичних систем.— Доп. АН УРСР, 1958, № 9, с. 913—916.
5. *Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости.— Тбилиси : Изд-во Тбил. ун-та, 1968.— 622 с.
6. *Лаврук Б. Р.* Про одну граничну задачу для системи лінійних диференціальних рівнянь другого порядку еліптичного типу.— Доп. АН УРСР, 1956, № 3, с. 214—219.

Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию 15.09.79

УДК 517.956.223

И. В. Коробчук, П. И. Миронюк

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОМ ЗАЩИТНЫХ НЕРАВЕНСТВ ВНЕШНЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПУАНКАРЕ

Пусть S — ограниченная замкнутая поверхность в пространстве R^n, диффеоморфная $(n-1)$-мерной сфере S^{n-1}, D_i — область, ограниченная поверхностью S и содержащая бесконечность, а $D_l = R^n \setminus D_i$. Исследуем вопрос о единственности в области D_l решения задачи

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \omega^2 u = f(x), \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} + \sigma u|_S = \varphi(x) \quad (\cos(\widehat{l, n}) > 0), \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + i\omega u = o\left(r^{-\frac{n-1}{2}}\right), \quad u = O\left(r^{-\frac{n-1}{2}}\right) \text{ при } r \to \infty, \tag{3}$$

где $\omega = \alpha(x) + i\beta(x)$ — комплексная функция; $\bar{n}$ — внешняя нормаль по отношению к D_l; коэффициенты a_{ij}, b_i, σ — действительные достаточно гладкие ограниченные функции; $\bar{l} \in C^{(1)}(S)$, $\cos(\widehat{l, \nu}) > 0$; $\bar{\nu}$ — конормаль, и, кроме того,

$$\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \gamma \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2, \quad \gamma > 0. \tag{4}$$

Теорема. Пусть в области D_l существуют действительные непрерывные ограниченные функции $B_k(x)$ $(k = \overline{1, n})$ с кусочно-непрерывными ограниченными производными $\frac{\partial B_k}{\partial x_k}$ такие, что выполняются неравенства

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k}{\partial x_k} - B_k^2\right) > c \quad (x \in D_l), \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{n} B_k \cos(\widehat{n, x_k}) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k \cos(\widehat{n, x_k}) + \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{a}{\cos(\widehat{l, \nu})}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{(g' - 2\sigma)\, a}{\cos(\widehat{l, \nu})}\right)\Bigg|_S < 0, \tag{6}$$

где $c = \max\limits_{D_l}\{\max\limits_{\|\xi\|=1} \xi^* A^{-1}\xi\}\left[\beta^2 - \alpha^2 - \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\partial b_k}{\partial x_k}\right]$; $a = \left[\sum\limits_{i=1}^{n}(a_{ij}\,\times\right.$ $\left.\times \cos(\widehat{n, x_i}))^2\right]^{\frac{1}{2}}$; $A = \|a_{ij}\|_{ij=1}^{n}$;

$\frac{\partial}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial l} - \cos(\widehat{l, \nu})\frac{\partial}{\partial\nu}$; g' — функция на S, зависящая лишь от поверхности S. Тогда задача (1) — (3) имеет единственное решение.

Доказательство. Убедимся, что соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение $u = 0$. Пусть S_r — сфера радиуса r, расположенная в области D_l, и $D_l \subset S_r$; D_r — область, заключенная между поверхностями S и S_r; n — внешняя по отношению к D_r нормаль. Интегрируя по D_r очевидное равенство, получаем

$$0 = \iint\limits_{D_r}\left\{\sum_{ij=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial |u|^2}{\partial x_j}\right) - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar u}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial |u|^2}{\partial x_i} + 2(\alpha^2 - \beta^2)|u|^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(B_i|u|^2) -$$

$$\left. - 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(B_i|u|^2)\right\} dD_r = \int\limits_{S \cup S_r}\left\{\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial |u|^2}{\partial x_j}\cos(\widehat{n, x_i}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} b_i |u|^2 \cos(\widehat{n, x_i}) + 2\sum_{i=1}^{n} B_i |u|^2 \cos(\widehat{n, x_i})\right\} ds -$$

$$- \iint\limits_{D_r}\left\{\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}\left(\frac{\partial \bar u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial b_i}{\partial x_i}|u|^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial B_i}{\partial x_i}|u|^2 + \right.$$

$$\left. + 4\sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial |u|}{\partial x_i}|u| + 2(\beta^2 - \alpha^2)|u|^2\right\} dD_r,$$

где $\bar u$ — комплексно-сопряженная функция к u.

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{S \cup S_r}\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial |u|^2}{\partial x_i}\cos(\widehat{n, x_j})\, ds = \int\limits_{S \cup S_r} a \frac{\partial |u|^2}{\partial \nu}\, ds =$$

$$= \int\limits_{S}\frac{a}{\cos(\widehat{l, \nu})}\left(\frac{\partial}{\partial l} - \frac{\partial}{\partial\tau}\right)|u|^2 ds + \int\limits_{S_r} a\cos(\widehat{\nu, n})\left(\frac{\partial}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial t}\right)|u|^2 ds.$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \nu} - \cos(\widehat{n, \nu})\frac{\partial}{\partial n}$. Применяя аналог формулы интегрирования по частям на многообразии *

$$\int_G \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \tau} ds = -\int_G \psi\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + g'\varphi\right) ds,$$

где g' — некоторая функция, зависящая лишь от многообразия G, а $\bar{\tau}$ — гладкое векторное поле на G, получаем

$$\int_S \frac{a}{\cos(\widehat{l, \nu})}\left(\frac{\partial}{\partial l} - \frac{\partial}{\partial \tau}\right)|u|^2 ds = \int_S \left[-\frac{2a\sigma}{\cos(\widehat{l, \nu})} + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\dot{a}}{\cos(\widehat{l, \nu})}\right) + \right.$$

$$\left. + g'\frac{a}{\cos(\widehat{l, \nu})}\right]|u|^2 ds,$$

$$\int_{S_r} a\cos(\widehat{\nu, n})\left(\frac{\partial}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial t}\right)|u|^2 ds = \int_{S_r} a\cos(\widehat{\nu, n})\frac{\partial |u|^2}{\partial n} ds +$$

$$+ \int_{S_r} a\cos(\widehat{\nu, n})\frac{\partial |u|^2}{\partial t} ds = \int_{S_r} a\cos(\widehat{\nu, n})\frac{\partial |u|^2}{\partial r} ds - \int_{S_r} |u|^2 \frac{\partial(a\cos(\widehat{\nu, n}))}{\partial t} ds.$$

Используя условия излучения (3) и устремляя радиус сферы к бесконечности, записываем

$$0 = -\iint_{D_l}\left\{\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j}\right) + 4\sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial |u|}{\partial x_i}|u| + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial b_i}{\partial x_i} + 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial B_i}{\partial x_i} + 2(\beta^2 - \alpha^2)\right)|u|^2\right\} dD_t +$$

$$+ \int_S \left\{\sum_{i=1}^{n}(2B_i + b_i)\cos(\widehat{n, x_i}) + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{a}{\cos(\widehat{l, \nu})}\right) + \frac{(g' - 2\sigma)a}{\cos(\widehat{l, \nu})}\right\}|u|^2 ds.$$

Отсюда следует, что при выполнении неравенств (5), (6) решение $u = 0$.

Луцкий филиал Львовского политехнического института

Поступила в редколлегию 15.09.79

УДК 517.946 : 4/5

И. М. Ковальчик

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ В ВИДЕ КОНТИНУАЛЬНОГО ИНТЕГРАЛА

Вопросу представления решений дифференциальных уравнений через интегралы в функциональных пространствах посвящено много работ. В частности, выражение фундаментальных решений операторных и дифференциальных уравнений и систем через континуальные интегралы содержится в работах [1, 2], а решение задачи Гурса для уравнений и систем гиперболического типа второго порядка — в работах [3, 4]. В данной работе решение задачи Коши для одного уравнения гиперболического типа выражено через интеграл по пространству непрерывных функций двух переменных.

---

* *Данилова И. А.* Внешние краевые задачи для уравнения Гельмгольца.— Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1968, 53, с. 58—72.