УДК 517.946

М. С. Волошина

РЕШЕНИЕ ВТОРОЙ СМЕШАННОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СЛУЧАЕ МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ С ПОМОЩЬЮ МАТРИЦЫ ГРИНА

В работе [3] построена матрица Грина задачи Дирихле в случае многосвязной области для неоднородной самосопряженной системы уравнений Эйлера

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) \equiv \sum_{n,\,l=1}^{n} A_{kl}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k \partial x_l} = F(x), \tag{1}$$

соответствующей основной вариационной задаче для положительно определенного функционала

$$\int_V \sum_{k,\,l=1}^{n} \frac{\partial u'(x)}{\partial x_k} A_{kl} \frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\,dx \geqslant \gamma^2 \int_V \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u'(x)}{\partial x_k}\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\,dx, \tag{2}$$

где $A_{kl} = A_{lk} = A_{kl}$ — постоянные действительные квадратные матрицы порядка p; $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$; V — некоторая область из R^n; γ — действительное число, и решена первая смешанная граничная задача для этой системы.

Сохраняя обозначения работы [3], решим для системы (1) вторую смешанную граничную задачу. Пусть S_k $(k = 0, 1, \ldots, m)$ — некоторые поверхности в R^n, $S_k \cap S_j = \varnothing$, S_0 заключает внутри себя все остальные поверхности. Относительно S_k считаем, что существует такое $R > 0$ (общее для всех поверхностей), что часть S_k, находящаяся внутри сферы радиуса R, описанной из произвольной точки S_k как из центра, при соответствующем выборе осей координат может быть записана уравнением вида $x_n = \varphi_k(x_1, \ldots, x_{n-1})$, где $\varphi_k(x_1, \ldots, x_{n-1})$ — однозначные функции; $\varphi_k(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in C^2(S_k)$. Пусть D_k $(k = 0, 1, \ldots, m)$ — область в R^n, ограниченная S_k,

$$D = D_0 \setminus \bigcup_{k=1}^{m} \overline{D}_k,\quad \overline{D}_k = D_k \cup S_k,\quad S = \partial D = \bigcup_{k=0}^{m} S_k.$$

Вторая смешанная граничная задача имеет вид

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) = F(x),\quad x \in D,\quad F(x) \in C(\overline{D}), \tag{1'}$$

$$\begin{gathered}\lim_{x \to y_0}\left[C^{(\nu_0)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) + h(x)\,u(x)\right] = f^{(k)}(y_0),\quad x \in D,\\ y_0 \in S_k,\quad k = 0, \ldots, r,\quad 0 \leqslant r < m,\quad f^{(k)}(y_0) \in C(S_k),\end{gathered} \tag{3}$$

$$\xi' h^{(s)}(x)\,\xi \geqslant 0,\quad h(y_0) \in C(S_k). \tag{4}$$

Здесь ξ — произвольный действительный вектор; $h(x)$ — матрица; $h^{(s)}(x)$ — ее симметрическая часть;

$$C^{(\nu_0)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv -2\sum_{k,l=1}^{n} \tilde{A}_{lk}\nu_l(y_0)\frac{\partial}{\partial x_k} -$$

граничный оператор типа Неймана; $\nu_l(y_0)$ $(l=1,\dots,n)$ — компоненты единичного вектора внутренней нормали в точке y_0 поверхности S_k. Матрицы $\tilde{A}_{lk}$ определяются единственным образом [4];

$$\lim_{x\to y_0} u(x) = f^{(k)}(y_0),\ x\in D,\ y_0\in S_k \quad k=r+1,\ \dots,\ m, \qquad f^{(k)}(y_0)\in C\ (S_k). \tag{5}$$

Решение второй смешанной граничной задачи (1), (3), (5) ищем в классе регулярных вектор-функций: $u(x)\in C^1(\bar{D})\cap C^2(D)$. Для эллиптических систем второго порядка в случае $n=2$ задача рассмотрена в работе [2], для систем теории упругости при $n=3$ — в работе [5], матрицы Грина для данных случаев — в работе [1].

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Задача (1), (3), (5) имеет единственное решение при условии его существования.

Доказательство следует из формулы Грина [6] и условий (2), (4).

Решим задачу (1), (3), (5). Пусть S_{m+1} — произвольная поверхность указанного выше типа, охватывающая все поверхности S_k $(k=0,\ 1,\ \dots,\ m)$, D_{m+1} — область, ограниченная S_{m+1}, $D_{m+1}^{(r)} = D_{m+1} \setminus \bigcup\limits_{k=r+1}^{m} D_k$, $\overset{(1)}{G}(x,\ y,\ D_{m+1}^{(r)})$ — матрица Грина внутренней задачи Дирихле для области $D_{m+1}^{(r)}$, обладающая свойствами [1, 3]:

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\overset{(1)}{G}(x,\ y,\ D_{m+1}^{(r)}) = 0, \quad x\neq y\in D_{m+1}^{(r)}, \tag{6}$$

$$\lim_{x\to y_0}\overset{(1)}{G}(x,\ y,\ D_{m+1}^{(r)}) = \overset{(1)}{G}(y_0,\ y,\ D_{m+1}^{(r)}) = 0, \qquad y_0\in S_k,\quad y\notin S_k \quad (k=r+1,\ \dots,\ m+1); \tag{7}$$

$$\overset{(1)}{G}(x,\ y,\ D_{m+1}^{(r)}) = \varphi_0(x-y) - \overset{(1)}{g}(x,\ y,\ D_{m+1}^{(r)}), \tag{8}$$

где $\overset{(1)}{g}(x,\ y,\ D_{m+1}^{(r)})$ — регулярное в $D_{m+1}^{(r)}$ матричное решение системы $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=0$, включая точку $x=y$;

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\int_D \overset{(1)}{G}(x,\ y,\ D_{m+1}^{(r)})f(y)\,dy = f(x), \quad x\in D,\ D\subset D_{m+1}^{(r)},\ f(y)\in C(\bar{D}); \tag{9}$$

$$\overset{(1)}{G}(x_1,\ x_2,\ D_{m+1}^{(r)}) = \overset{(1)}{G}{}'(x_2,\ x_1,\ D_{m+1}^{(r)}); \tag{10}$$

$$\lim_{x\to y_0}\left[C^{(\nu_0)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)+h(x)\right]\sum_{k=0}^{r}\int_{S_k}\overset{(1)}{G}(x,\ y,\ D_{m+1}^{(r)})\,\mu(y)\,d_yS =$$

$$= -\mu(y_0) + \sum_{k=0}^{r}\int_{S_k}\left[C^{(\nu_0)}\left(\frac{\partial}{\partial y_0}\right)+h(y_0)\right]\overset{(1)}{G}(y_0,\ y,\ D_{m+1}^{(r)})\,\mu(y)\,d_yS, \tag{11}$$

$$x\in D_{m+1}^{(r)},\quad y_0\in S_k,\quad k=0,\ 1,\ \dots,\ r;$$

$$\lim_{x\to y_0}\sum_{k=r+1}^{m}\int_{S_k}\left[C^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\overset{(1)}{G}(x,\ y,\ D_{m+1}^{(r)})\right]' f^{(k)}(y)\,d_yS = 2f^{(k)}(y_0),$$

$$y_0\in S_k,\quad k=r+1,\ \dots,\ m,\quad x\in D; \tag{12}$$

$$\lim_{x\to y_0}\left[C^{(\nu_0)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)+h(x)\right]\sum_{k=0}^{r}\int_{S_k}\overset{(1)}{G}(x,\ y,\ D_{m+1}^{(r)})\,\mu(y)\,d_yS =$$

$$= -\mu(y_0) + \sum_{k=0}^{r}\int_{S_k}\left[C^{(\nu_0)}\left(\frac{\partial}{\partial y_0}\right) + h(y_0)\right]\overset{(1)}{G}(y_0,\ y,\ D_{m+1}^{(r)})\,\mu(y)\,d_yS,$$

$$x \in \bigcup_{k=r+1}^{m} D_k,\quad y_0 \in S_k,\quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ r. \tag{13}$$

Решение задачи (1), (3), (5) ищем в виде

$$u(x) = \int_D \overset{(1)}{G}(x,\ y,\ D_{m+1}^{(r)})\,F(y)\,dy +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=r+1}^{m}\int_{S_k}\left[C^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\overset{(1)}{G}(x,\ y,\ D_{m+1}^{(r)})\right]' f^{(k)}(y)\,d_yS +$$

$$+ \sum_{k=0}^{r}\overset{(1)}{G}(x,\ y,\ D_{m+1}^{(r)})\,\mu(y)\,d_yS, \tag{14}$$

где $\mu(y) \in C(S_k)$ $(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ r)$ — неизвестный вектор. Используя свойства (6), (9), убеждаемся, что вектор $u(x)$, определяемый выражением (13), удовлетворяет системе (1). Вследствие свойств (7), (8) и (12) удовлетворяются граничные условия (5). Для выполнения граничных условий (3) типа Неймана решаем систему регулярных интегральных уравнений

$$-\mu(y_0) + \sum_{k=0}^{r}\int_{S_k}\left[C^{(\nu_0)}\left(\frac{\partial}{\partial y_0}\right) + h(y_0)\right]\overset{(1)}{G}(y_0,\ y,\ D_{m+1}^{(r)})\,\mu(y)\,d_yS = \Psi(y_0),$$

$$y_0 \in S_k,\ k = 0,\ \ldots,\ r, \tag{15}$$

$$\Psi(y_0) = f^{(k)}(y_0) - \int_D\left[C^{(\nu_0)}\left(\frac{\partial}{\partial y_0}\right) + h(y_0)\right]\overset{(1)}{G}(y_0,\ y,\ D_{m+1}^{(r)})\,F(y)\,dy -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=r+1}^{m}\int_{S_k}\left[C^{(\nu_0)}\left(\frac{\partial}{\partial y_0}\right) + h(y_0)\right]\left[C^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\overset{(1)}{G}(y_0,\ y,\ D_{m+1}^{(r)})\right]' f^{(k)}_{(y)}\,d_yS.$$

Покажем, что ее можно решить по первой теореме Фредгольма.

Рассмотрим однородную систему

$$-\mu(y_0) + \sum_{k=0}^{r}\int_{S_k}\left[C^{(\nu_0)}\left(\frac{\partial}{\partial y_0}\right) + h(y_0)\right]\overset{(1)}{G}(y_0,\ y,\ D_{m+1}^{(r)})\,\mu(y)\,d_yS = 0,$$

$$y_0 \in S_k,\quad k = 0,\ \ldots,\ r\quad (r < m) \tag{16}$$

в предположении, что $\mu_1(y) \not\equiv 0$ является ее решением. Тогда для потенциала

$$V(x) = \sum_{k=0}^{r}\int_{S_k}\overset{(1)}{G}(x,\ y,\ D_{m+1}^{(r)})\,\mu_1(y)\,d_yS \tag{17}$$

вследствие выражений (6), (7), (11) и (16) получаем

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)V(x) = 0,\ \ x \in D;\quad \lim_{x \to y_0} V(x) = 0,\quad y_0 \in \bigcup_{k=r+1}^{m} S_k;$$

$$\lim_{x \to y_0}\left[C^{(\nu_0)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + h(x)\right]V(x) = 0,\ \ x \in D;\quad y_0 \in \bigcup_{k=0}^{r} S_k.$$

Согласно теореме 1 $V(x) \equiv 0$, $x \in \overline{D}$. Из непрерывности потенциала (17) в области $D_{m+1}^{(r)}$ (что вытекает из формулы (8)) следует, что $\lim\limits_{x \to y_0} V(x) = 0$, $x \in D_k$, $y_0 \in S_k$, $k = 1,\ \ldots,\ r$, в связи с чем из $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)V(x) = 0$, $x \in D_k$,

$k = 1, \ldots, r$, следует, что $V(x) = 0$, $x \in D_{\nu}$. Далее получаем

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) V(x) = 0, \quad x \in D_{m+1} \setminus \bar{D}_0, \quad \lim_{x \to y_0} V(x) = 0, \quad y_0 \in S_{m+1}, \quad y_0 \in S_0.$$

Поэтому $V(x) \equiv 0$, $x \in D_{m+1} \setminus \bar{D}_0$. Значит, $V(x) \equiv 0$, $x \in \bar{D}^{(r)}_{m+1}$, откуда вследствие непрерывности потенциала (17), а также формул (16), (11) и (13) получаем $\mu_1(y) \equiv 0$, $y \in S_k$, $k = 0, 1, \ldots, r$. Таким образом, задача (15) решается по первой теореме Фредгольма.

Теорема 2. Вторая смешанная граничная задача (1), (3), (5) однозначно разрешима и ее решение имеет вид (14); неизвестная плотность $\mu(y)$ однозначно определяется из системы регулярных уравнений (15).

Все сказанное выше переносится на случай систем дифференциальных уравнений вариационного типа с переменными коэффициентами

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) \equiv \sum_{k,l=1}^{n} A_{kl}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{n} A_k(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} + A(x) u(x) = 0$$

при условии существования для них во всем бесконечном пространстве фундаментальной матрицы.

1. *Бурчуладзе Т. В.* Тензоры Грина и их некоторые применения.— Тр. Груз. политехн. ин-та, 1963, № 8 (93), с. 87—119.
2. *Бурчуладзе Т. В.* Смешанные граничные задачи для некоторых эллиптических систем в многосвязных областях.— Тр. Тбил. мат. ин-та, 1967, 32, с. 29—53.
3. *Волошина М. С.* Розв'язок першої змішаної граничної задачі для одного класу сильно еліптичних систем у випадку багатозв'язаної області за допомогою матриці Гріна.— Вісн. Льв. політехн. ін-ту. Математика і механіка, 1977, № 119, с. 27—30.
4. *Волошина М. С.* Про деякі властивості одного класу сильно еліптичних систем.— Доп. АН УРСР, 1958, № 9, с. 913—916.
5. *Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости.— Тбилиси : Изд-во Тбил. ун-та, 1968.— 622 с.
6. *Лаврук Б. Р.* Про одну граничну задачу для системи лінійних диференціальних рівнянь другого порядку еліптичного типу.— Доп. АН УРСР, 1956, № 3, с. 214—219.

Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию 15.09.79

УДК 517.956.223

И. В. Коробчук, П. И. Миронюк

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОМ ЗАЩИТНЫХ НЕРАВЕНСТВ ВНЕШНЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПУАНКАРЕ

Пусть S — ограниченная замкнутая поверхность в пространстве R^n, диффеоморфная $(n-1)$-мерной сфере S^{n-1}, D_i — область, ограниченная поверхностью S и содержащая бесконечность, а $D_l = R^n \setminus D_i$. Исследуем вопрос о единственности в области D_l решения задачи

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \omega^2 u = f(x), \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} + \sigma u|_S = \varphi(x) \quad (\cos(\widehat{l, n}) > 0), \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + i\omega u = o\left(r^{-\frac{n-1}{2}}\right), \quad u = O\left(r^{-\frac{n-1}{2}}\right) \quad \text{при} \quad r \to \infty, \tag{3}$$

где $\omega = \alpha(x) + i\beta(x)$ — комплексная функция; $\bar{n}$ — внешняя нормаль по отношению к D_l; коэффициенты a_{ij}, b_i, σ — действительные достаточно гладкие ограниченные функции; $\bar{l} \in C^{(1)}(S)$, $\cos(\widehat{l, \nu}) > 0$; $\bar{\nu}$ — конормаль, и,