УДК 539.3

В. П. Ольшанский

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ, НАГРУЖЕННОЙ НА ПРЯМОУГОЛЬНОМ УЧАСТКЕ ПОВЕРХНОСТИ

Этой задаче в литературе уделялось значительное внимание в связи с актуальностью ее для различных областей техники. Подробная библиография содержится в обзоре [3]. В отличие от имеющихся исследований, где компоненты локального напряженного состояния для малых площадок нагружения представлены слабосходящимися тригонометрическими рядами, здесь предлагаются приближенные простые асимптотические формулы. Они получены в результате разложения в степенной ряд с логарифмом двумерных интегралов Фурье по малому безразмерному параметру. Эффективность применения двумерного преобразования Фурье для решения задач рассматриваемого типа показана в работах [1, 2] и других публикациях этих авторов, где получены простые асимптотические формулы для круговых областей нагружения.

Пусть прямоугольная площадка приложения нагрузки ориентирована на поверхности оболочки так, что ее стороны параллельны линиям главной кривизны. Полагая область нагружения достаточно удаленной от края, аналогично работам [1, 2] не будем учитывать влияние граничных условий на распределение местных напряжений, которые быстро затухают в оболочках с большим показателем изменяемости, по мере удаления от зоны локального возмущения. В такой постановке задача анализа возмущенного напряженного состояния сводится к интегрированию фундаментального решения уравнений оболочек с плотностью внешней нагрузки $q(x, y)$ по области прямоугольника. Согласно методу интегральных преобразований Фурье это эквивалентно введению в фундаментальные решения весовой функции

$$f(\xi, \eta) = \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int q(x, y)\,dxdy\right]^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int q(x, y)\, e^{i(\xi x+\eta y)}dxdy, \quad i^2 = -1.$$

Если начало местной системы координат xoy расположено в центре площадки со сторонами $2h_1$ и $2h_2$, а оси направлены по линиям главной кривизны, то равномерному распределению внешней силы P соответствует

$$q = \frac{P}{4h_1^2h_2^2}, \quad f(\xi, \eta) = (\xi\eta h_1 h_2)^{-1} \sin \xi h_1 \sin \eta h_2. \tag{1}$$

С учетом выражений (1) из фундаментальных решений [1] для основных компонентов напряженного состояния: изгибающих моментов m_k и перерезывающих сил q_k ($k = 1$; 2) при действии нормальной нагрузки получаем зависимости

$$m_1 = P_1(B_1 + \nu B_2), \quad m_2 = P_1(B_2 + \nu B_1), \quad P_1 = P/4\pi^2, \tag{2}$$
$$q_1 = -P_1 iB_3, \quad q_2 = -P_1 iB_4.$$

Здесь

$$B_i = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int [(\xi^2 + \eta^2)^4 + b^4(\xi^2 + \lambda\eta^2)^2]^{-1} \times$$
$$\times f(\xi, \eta)\,[\xi^2\delta_{1i} + \eta^2\delta_{2i} + (\xi^2 + \eta^2)(\xi\delta_{4i} + \eta\delta_{5i})] \times$$
$$\times (\xi^2 + \eta^2)^2 e^{-i(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta; \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4; \tag{3}$$
$$b^4 = 12(1 - \nu^2)h^{-2}R_2^{-2}; \quad 0 \leqslant \lambda = R_2R_1^{-1} \leqslant 1;$$

R_1, R_2 — радиусы кривизны оболочки толщиной h; E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона; δ_{mj} — символ Кронекера.

Преимущество выражений (2), (3) по сравнению с известными формулами локальных напряжений в виде двойных тригонометрических рядов состоит в том, что при малых размерах нагружения несобственные интегралы (3) имеют простые асимптотические представления, тогда как сходимость рядов резко ухудшается.

Анализ интегралов Фурье (3) удобно провести методом, близким к предложенному в работе [4]. Не излагая его, кратко укажем лишь суть отличий. Продемонстрируем это на примере интеграла B_1. Выразив произведение тригонометрических функций через сумму, получим

$$B_1 = \frac{1}{4h_1h_2} \sum_{s=0}^{1} \sum_{k=0}^{1} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \frac{\xi(\xi^2+\eta^2)^2 \sin \xi H_{1s} \sin \eta H_{2k}}{\eta\left[(\xi^2+\eta^2)^4 + b^4(\xi^2+\lambda\eta^2)^2\right]} d\xi d\eta,$$

$$H_{1s} = h_1 + (-1)^s x, \quad H_{2k} = h_2 + (-1)^k y.$$

Введя новые переменные $\xi = \gamma\cos\varphi$, $\eta = \gamma\sin\varphi$, $H_{1s} = r\cos\theta$, $H_{2k} = r\sin\theta$ с помощью рядов

$$\sin\xi H_{1s}\sin\eta H_{2k} = 2\sum_{n=0}^{n} J_{2n+1}(r\gamma)\sin(2n+1)\theta\sin(2n+1)\varphi,$$

$$\sin(2n+1)\varphi(\sin\varphi)^{-1} = \sum_{m=0}^{2n}\cos(2n-2m)\varphi,$$

вычисление B_1 сводим к выражению

$$B_1 = \frac{2}{h_1h_2}\sum_{s=0}^{1}\sum_{k=0}^{1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2n}\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\cos(2n-2m)\varphi \times$$

$$\times \int\limits_0^{\infty}\gamma J_{2n+1}(r\gamma)\left[\gamma^4 + b^4(\cos^2\varphi + \lambda\sin^2\varphi)^2\right]^{-1} d\gamma d\varphi \sin(2n+1)\theta,$$

где j_{2n+1} — функция Бесселя первого рода.

Дальнейшее интегрирование по γ и φ осуществляется так же, как и в работе [4]. В результате получаем разложения интегралов по степеням безразмерного параметра $(br/2)$, который меньше единицы для малых площадок нагружения. Не останавливаясь на вопросе сходимости этих разложений, приведем асимптотические значения B_j с точностью порядка $(br/2)^4$ и укажем связь полученных таким путем формул с другими исследованиями.

Для изгибающих моментов в центре площадки имеем

$$B_j(0,0) = \frac{-\pi}{2}\left\{2\ln\left[\frac{b}{4}(1+\sqrt{\lambda})(h_1^2+h_2^2)^{1/2}\right] + (-1)^j\frac{\sqrt{\lambda}-1}{\sqrt{\lambda}+1} + \right.$$

$$+ 2\gamma - 3 + \Omega_j - \frac{\pi b^2}{48}\left[\left(5-2j-\frac{\varepsilon}{2}\right)h_1^2 + \left(2j-1-2j\varepsilon + \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{3}{2}\varepsilon\right)h_2^2\right]\right\} + O(\alpha_1^4), \quad \gamma \approx 0{,}5772; \quad j = 1,\ 2,\ \alpha_1 = br/2, \tag{4}$$

$$\Omega_1 = \frac{2h_1}{h_2}\operatorname{arctg}\frac{h_2}{h_1}, \quad \Omega_2 = \frac{2h_2}{h_1}\operatorname{arctg}\frac{h_1}{h_2}, \quad \varepsilon = 1-\lambda.$$

Из выражений (2), (4) без учета слагаемых с b^2 при $h_1 = h_2 = u/2$, $\lambda = 1$, $b = 1/l$ следует известная формула изгибающих моментов в плите на упругом основании, равномерно нагруженной по квадрату со стороной u [6].

Для максимальных значений перерезывающих сил находим

$$q_1 = Q\left[h_2 \ln \frac{h_2^2 + 4h_1^2}{h_2^2} + 4h_1 \operatorname{arctg} \frac{h_2}{2h_1} - \frac{\pi b^2 h_1}{16}(3 + \lambda)\right] + O(\alpha_1^4),$$

$$q_2 = Q\left[h_1 \ln \frac{h_1^2 + 4h_2^2}{h_1^2} + 4h_2 \operatorname{arctg} \frac{h_1}{2h_2} - \frac{\pi b^2 h_2}{16}(1 + 3\lambda)\right] + O(\alpha_1^4), \quad Q = P(8\pi h_1 h_2)^{-1}.$$

Чтобы оценить точность асимптотических формул, сопоставим результаты вычислений с данными справочника [5]. Для примера положим $h_1 = h_2$, $\lambda = 0$, $\nu = 0,3$, $bh_1 = 0,5$. Вычисления дают $m_1/P = 0,168$, $m_2/P = 0,223$. С другой стороны, используя связь между параметрами справочника β, η и статьи в виде $2bh_1 = \eta\sqrt{\beta}\sqrt[4]{12(1 - \nu^2)}$ при $\beta = 50$, $\eta/2 = 3,92 \cdot 10^{-2}$, по графикам, полагая $\alpha = 0,125$, находим $m_1/P \approx 0,16$, $m_2/P \approx 0,21$. Незначительные отличия наблюдались и при других параметрах нагружения, что подтверждает возможность использования в расчетах простых асимптотических формул.

1. *Величко П. М., Шевченко В. П.* О действии сосредоточенных сил и моментов на оболочку положительной кривизны.— Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1969, № 2, с. 342—349.
2. *Величко П. М., Хижняк В. К., Шевченко В. П.* Местные напряжения в оболочках положительной, нулевой и отрицательной кривизн.— В кн.: Тр. X Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Тбилиси : Мецниереба, 1975, с. 31—39.
3. *Жигалко Ю. П.* Статика оболочек при силовых локальных воздействиях.— Исслед. по теории пластин и оболочек, 1975, вып. 11, с. 62—91.
4. *Ольшанский В. П.* Сингулярные решения уравнений пологих оболочек для сосредоточенной касательной нагрузки.— Журн. ПМТФ, 1978, № 2, с. 139—144.
5. *Прочность.* Устойчивость. Колебания : Справочник. / И. А. Биргер, Я. Г. Пановко, С. А. Амбарцумян и др.— М. : Машиностроение, 1968.— Т. 2. 463 с.
6. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки.— М. : Физматгиз, 1963.— 636 с.

Харьковский политехнический институт

Поступила в редколлегию 19.04.78