

Н. И. Сорокатый

**О ВЛИЯНИИ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СВЯЗИ
НА УСТОЙЧИВОСТЬ И МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ
УПРУГОГО СТЕРЖНЯ**

В теории упругих колебаний и устойчивости актуальным является изучение сложных континуально-дискретных систем, динамические характеристики которых зависят от различных параметров. Эффективным методом исследования указанных систем является метод характеристических рядов [2, 3]. В данной статье этот метод применен к решению задачи о влиянии промежуточной упругой опоры на критическую нагрузку и частоту колебаний консольного прямоугольного сжатого стержня.

Пусть нижний конец ($\xi = 0$) рассматриваемого стержня жестко зашпелен, а верхний ($\xi = l$) — нагружен консервативной силой P . На расстоянии ξ_1 ($0 \leq \xi_1 \leq l$) от нижнего конца стержня размещена упругая опора жесткости k_0 . Представляя решение задачи о малых колебаниях такого стержня в виде

$$y(\xi, t) = f(\xi) e^{i\omega t},$$

где ω — параметр частоты, t — время, приходим к следующей обобщенной задаче на собственные значения:

$$f^{IV}(x) - \beta f''(x) - \Omega^2 f(x) = -K \delta(x-a) f(x), \quad (1)$$

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f''(1) = 0, \quad f'''(1) - \beta f'(1) = 0. \quad (2)$$

Здесь $\beta = -\frac{Pl^2}{EI}$; $\Omega^2 = \frac{\omega^2 l^4 m}{EI}$; $K = \frac{k_0 l^4}{EI}$; $x = \frac{\xi}{l}$; $a = \frac{\xi_1}{l}$; EI — изгибная жесткость; m — масса единицы длины стержня; δ — дельта-функция.

С использованием известных результатов [2, 4, 5] получим обобщенное решение уравнения (1) в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^3 C_k [\varphi^{(k)}(x) - K \varphi^{(k)}(a) \varphi(x-a) \theta(x-a)], \quad (3)$$

где $\theta(x)$ — единичная функция Хевисайда; $\varphi(x)$ — решение задачи Коши для уравнения (1) при $K = 0$ с такими начальными условиями:

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 1.$$

Подставляя решение (3) в условия (2), приходим к характеристическому уравнению

$$F_0(1) - K [\varphi_2(\varphi_1 \varphi''' - \varphi_1 \varphi^{IV}) - \varphi_2''(\varphi_1 \varphi'' - \varphi_1 \varphi''')] + \\ + \beta \{F_2(1) - K [\varphi_2'(\varphi_1 \varphi'' - \varphi_1 \varphi''') - \varphi_2''(\varphi_1 \varphi' - \varphi_1 \varphi'')]\} = 0, \quad (4)$$

где $\varphi^{(n)} = \varphi^{(n)}(x)|_{x=1}$; $\varphi_1^{(n)} = \varphi^{(n)}(x)|_{x=a}$; $\varphi_2^{(n)} = \varphi^{(n)}(x)|_{x=1-a}$

$$(n = 0, 1, 2, 3, 4);$$

$$F_{2s}(x) = [\varphi^{(3-s)}(x)]^2 - \varphi^{(2-s)}(x) \varphi^{(4-s)}(x) \quad (s = 0, 1, 2).$$

Используя известное представление

$$\varphi(x) = \sum_{q=1}^4 \frac{\exp(s_q x)}{\rho_4'(s_q)},$$

где s_q — корни характеристического полинома,

$$\rho_4(s) = s^4 - \beta s^2 - \Omega^2,$$

приводим уравнение (4) к виду

$$F_0(1) + K[F_4(a)F_0'(1-a) + F_1'(a)F_0(1-a)] + \\ + \beta \{F_2(1) + K[F_4(a)F_2'(1-a) + F_1'(a)F_2(1-a)]\} = 0. \quad (5)$$

Отметим, что из уравнения (5) в частных случаях получаются известные характеристические уравнения [2].

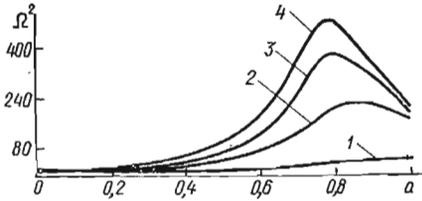


Рис. 1

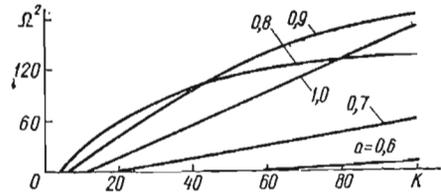


Рис. 2

Исследование зависимости критической нагрузки и основной частоты от параметров a , K ($0 \leq a \leq 1$, $0 \leq K \leq \infty$) проводилось, как правило, с помощью наипростейших оценок [1], для которых достаточны три коэффициента характеристического ряда, соответствующего уравнению (5). В случаях, когда этого было недостаточно, применялись последующие оценки с применением пяти коэффициентов. Некоторые из полученных результатов приведены на рис. 1—3.

На рис. 1 приведена зависимость частоты колебаний от размещения промежуточной опоры при разных ее жесткостях для $p = -\beta = 0$. Кривым 1—4 соответствуют значения $K = 10, 100, 300, \infty$. Аналогичный качественный характер имеют кривые при $p \neq 0$.

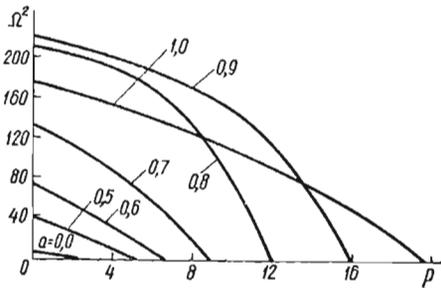


Рис. 3

На рис. 2 приведена зависимость частоты колебаний от жесткости опоры при различных ее положениях и фиксированной нагрузке ($p = 6$). Значения a указано справа от каждой кривой. Из данных рис. 2 следует, что для малых жесткостей ($K < 40$) максимум частоты достигается тогда, когда опора находится в крайнем верхнем положении ($a = 1$). При больших значениях K ($K > 40$) максимуму частоты соответствуют меньшие значения параметра a . В частности, при $p = 0$, $K = \infty$, $a \approx 0,75$ (см. рис. 1), причем основная частота собственных колебаний более чем в 35 раз превышает соответствующее значение для консоли. Зависимость частоты колебаний от нагрузки при различных положениях опоры и фиксированной ее жесткости ($K = 100$) приведена на рис. 3.

Поскольку в проведенных вычислениях верхние оценки превышали соответствующие нижние не более чем на 1%, графики построены с использованием нижних оценок.

1. Балинский А. И., Зорий Л. М. К исследованию зависимости низших частот деформируемых систем от параметров. — ФХММ, 1971, 7, № 3, с. 99—100.
2. Зорий Л. М. Про одне зображення характеристичних рівнянь деяких крайових задач для систем з розподіленими параметрами. — Доп. АН УРСР. Сер. А, 1968, № 12, с. 1072—1075.
3. Зорий Л. М. До теорії стійкості систем з розподіленими параметрами. — Доп. АН УРСР. Сер. А, 1968, № 11, с. 992—995.
4. Зорий Л. М. До застосування узагальнених функцій в аналітичних методах дослідження складних пружних систем. — Доп. АН УРСР. Сер. А, 1978, № 11, с. 991—994.
5. Образцов И. Ф., Онанов Г. Г. Строительная механика скошенных тонкостенных систем. — М.: Машиностроение, 1973. — 658 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 11.12.78