При этом получим выражения для напряжений σ_y, вызванных суммарным температурным полем (6):

$$
\begin{aligned}
&\sigma_y^{(c)} = E_0\left(C_1x + C_2 - \alpha A_{01}e^{b_{01}x+c_{01}x^2}\right) \text{ при } \begin{array}{l} a_1 \leqslant x \leqslant x_2, \\ x_1 \leqslant x \leqslant x_0, \end{array} \\
&\sigma_y^{(c)} = E_0\left(C_1x + C_2 - \alpha \sum_{i=0}^{n} \gamma_i x^i\right) \text{ при } x_2 \leqslant x \leqslant x_1, \\
&\sigma_y^{(c)} = E_0\left(C_1x + C_2 - \alpha A_{02}e^{b_{02}x+c_{02}x^2}\right) \text{ при } x_{01} \leqslant x \leqslant a_2, \\
&\sigma_y^{(c)} = 0 \text{ при } x_0 \leqslant x \leqslant x_{01}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Здесь $x = x_0$; $x = x_{01}$ — сечения, в которых температура равна T_k.

Числовые исследования температурных полей подогрева (7) и напряжений в прямоугольной пластинке длины $l = 660$ мм из материала М-40 ($E_0 = 7100$ кг/мм^2, $\sigma_0 = 31$ кг/мм^2, $\alpha = 24{,}2$ 1/град, $T_k = 343°$ С) при $q = 450$ кал/с, $c = 0{,}21$ кал/г · град, $\gamma = 2{,}75$ г/см^3, $\lambda = 0{,}34$ кал/см × × с · град проведены для фиксированного момента времени $\tau_1 = 175$ с ($a_1 = -580$ мм, $a_2 = 80$ мм).

На рисунке при $k = -0{,}5$, $x_0 = x_1 = 48$ мм представлены графики температурного поля локального подогрева и вызванные суммарным полем напряжения (сплошные линии), а также графики температурного поля (8) и соответствующие напряжения (штриховые линии). Кривые *1*—*3* соответствуют значениям $x_2 = 400, 450, 500$ мм. Из рисунка видно, что максимальный уровень температурных полей подогрева понижается с увеличением зоны подогрева. При этом расстояние от начала подвижной системы координат до сечения, в котором он достигается, увеличивается, составляя 165, 180, 200 мм соответственно. Уровни поперечных напряжений, обусловленных суммарным температурным полем, с увеличением ширины зоны подогрева уменьшаются.

Приведенная здесь расчетная схема определения оптимальных температурных полей подогрева пластинки движущимся температурным полем может быть использована при разработке методики оптимизации поперечных сварочных напряжений.

1. *Бурак Я. И., Романчук Я. П., Казимиров А. А., Моргун В. П.* Выбор оптимального поля предварительного подогрева пластин при сварке.— Автомат. сварка, 1979, № 5, с. 15—19.
2. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление.— М. : Физматгиз, 1961.— 228 с.
3. *Рыкалин Н. Н.* Тепловые основы сварки.— М. ; Л. : Изд-во АН СССР, 1947.— 271 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 24.09.79

УДК 539.3.01

А. Н. Бородачев

К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИСКА

Решение краевых задач линейной однородной и изотропной теории упругости для эллиптического диска, к которым относятся задачи механики разрушения о плоской эллиптической трещине в неограниченной среде, контактные задачи о жестком штампе эллиптического сечения на полупространстве и задачи о деформировании неограниченного тела, содержащего тонкое жесткое эллиптическое включение, сводится в общем случае полиномиальных граничных условий к построению трех ньютоновских потенциалов эллиптического диска. Наиболее общий и естественный метод выбора плотностей потенциалов, гарантирующий удовлетворение заданным граничным условиям, связан, по-видимому, с использованием теоремы Дайсона [4]. В случае полиномиальных граничных условий эта теорема позволяет записать указанные потенциалы в виде конечных сумм произведений степеней координат на однократные интегралы определенного типа — так называемые обобщенные потенциальные факторы эллиптического диска, играющие вследствие этого решающую роль при вычислении всех характеристик упругого поля.

В настоящей работе получены удобные рекуррентные формулы и некоторые дополнительные соотношения для внешних и внутренних обобщенных потенциальных факторов эллиптического диска. Использование этих результатов существенно упрощает численные расчеты и оказывается полезным при общем анализе решения. В предшествующих исследованиях [2, 3] содержатся лишь некоторые результаты, относящиеся исключительно к внутренним потенциальным факторам, которые, как будет показано ниже, являются следствием более общих соотношений для внешних потенциальных факторов.

Систематическое применение методов теории потенциала позволило автору статьи [4] указать общий вид решений задач рассматриваемого типа, соответствующих различным полиномиальным граничным условиям. При этом оказалось, что определение характеристик упругого поля в точках пространства вне диска сводится к вычислению интегралов следующего вида:

$$B_{l,m,n}(\xi) = \frac{\pi a_1 a_2}{2} \int\limits_{\xi}^{\infty} \frac{du}{(a_1^2+u)^l (a_2^2+u)^m u^n Q(u)}, \tag{1}$$

где a_1 и a_2 — большая и малая полуоси эллипса соответственно; $Q(u) = [(a_1^2+u)(a_2^2+u)u]^{1/2}$; $l, m = 0, 1, 2, \ldots, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, причем, если $n < 0$, то $|n| \leqslant l+m$, а ξ — параметр, изменяющийся в пределах от 0 (на поверхности диска) до ∞ (в бесконечно удаленных точках) и определяющий семейство эллипсоидов, софокусных с исходным эллиптическим диском. Введенные таким образом величины $B_{l,m,n}(\xi)$ будем называть обобщенными внешними потенциальными факторами эллиптического диска в отличие от собственно внешних потенциальных факторов, все три индекса которых принимают только неотрицательные значения.

Рекуррентные формулы

$$B_{l,m,n}(\xi) = B_{l-1,m,n+1}(\xi) - a_1^2 B_{l,m,n+1}(\xi),$$
$$B_{l,m,n}(\xi) = B_{l,m-1,n+1}(\xi) - a_2^2 B_{l,m,n+1}(\xi) \tag{2}$$

позволяют выразить любой обобщенный внешний потенциальный фактор с отрицательным третьим индексом через величины типа $B_{l,m,0}(\xi)$. Поэтому далее ограничимся рассмотрением свойств собственно внешних потенциальных факторов $B_{l,m,n}(\xi)$, $l, m, n = 0, 1, 2, \ldots$, основные соотношения для которых можно получить предельным переходом из соответствующих соотношений для внешних потенциальных факторов трехосного эллипсоида. Результаты, полученные таким образом, представим ниже в более удобном для практического использования виде, чем это сделано в работе [1] для потенциальных факторов эллипсоида.

Итак, если любые два индекса из трех отличны от нуля, то справедливы следующие рекуррентные формулы:

$$(a_1^2 - a_2^2) B_{l+1,m+1,n}(\xi) = B_{l,m+1,n}(\xi) - B_{l+1,m,n}(\xi),$$
$$a_1^2 B_{l+1,m,n+1}(\xi) = B_{l,m,n+1}(\xi) - B_{l+1,m,n}(\xi),$$
$$a_2^2 B_{l,m+1,n+1}(\xi) = B_{l,m,n+1}(\xi) - B_{l,m+1,n}(\xi). \tag{3}$$

В противном случае следует пользоваться формулами

$$(2l+3) a_1^2 (a_1^2 - a_2^2) B_{l+2,0,0}(\xi) = (2l+2)(2a_1^2 - a_2^2) B_{l+1,0,0}(\xi) - (2l+1) \times$$
$$\times B_{l,0,0}(\xi) + \pi a_1 a_2 (a_1^2+\xi)^{-l-2} Q(\xi),$$

$$(2m+3)\, a_2^2 (a_1^2 - a_2^2)\, B_{0,m+2,0}(\xi) = (2m+2)(a_1^2 - 2a_2^2) B_{0,m+1,0}(\xi) + \\ + (2m+1)\, B_{0,m,0}(\xi) - \pi a_1 a_2 (a_2^2 + \xi)^{-m-2} Q(\xi), \tag{4}$$

$$(2n+3)\, a_1^2 a_2^2 B_{0,0,n+2}(\xi) = -(2n+2)(a_1^2 + a_2^2)\, B_{0,0,n+1}(\xi) - \\ - (2n+1)\, B_{0,0,n}(\xi) + \pi a_1 a_2 \xi^{-n-2} Q(\xi).$$

Помимо рекуррентных формул (3) и (4) внешние потенциальные факторы эллиптического диска связаны между собой соотношениями

$$(2l+1)\, B_{l+1,m,n}(\xi) + (2m+1)\, B_{l,m+1,n}(\xi) + (2n+1)\, B_{l,m,n+1}(\xi) = \\ = \pi a_1 a_2 (a_1^2 + \xi)^{-l-1} (a_2^2 + \xi)^{-m-1} \xi^{-n-1} Q(\xi), \tag{5}$$

$$a_1^2 (2l+1)\, B_{l+1,m,n}(\xi) + a_2^2 (2m+1)\, B_{l,m+1,n}(\xi) = (2l + 2m + 2n + 1) \times \\ \times B_{l,m,n}(\xi) - \pi a_1 a_2 (a_1^2 + \xi)^{-l-1} (a_2^2 + \xi)^{-m-1} \xi^{-n} Q(\xi). \tag{6}$$

Следует помнить, что в формулах (3) — (6) индексы l, m и n принимают только неотрицательные значения.

Если определение характеристик потенциального поля в точках пространства вне диска связано с вычислением обобщенных внешних потенциальных факторов, то на самой поверхности диска, где $\xi = 0$, аналогичная роль отводится обобщенным внутренним потенциальным факторам

$$B_{l,m,n} = B_{l,m,n}(0) = \frac{\pi a_1 a_2}{2} \int\limits_0^\infty \frac{du}{(a_1^2 + u)^l (a_2^2 + u)^m u^n Q(u)}, \tag{7}$$

которые связывают внешнее поле с полем на поверхности диска, т. е. с внутренним полем.

В отличие от случая трехосного эллипсоида, внутренние потенциальные факторы которого определены при любых положительных значениях третьего индекса [1], величины $B_{l,m,n}$, как это видно из равенств (7), принимают конечные значения только при $n \leqslant 0$. Таким образом, есть смысл рассматривать свойства лишь тех факторов $B_{l,m,n}$, у которых l, $m = 0$, 1, 2, ..., $n = 0$, -1, -2, ..., причем, как и раньше, $|n| \leqslant l + m$.

Рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} B_{l,m,n} &= B_{l-1,m,n+1} - a_1^2 B_{l,m,n+1}, \\ B_{l,m,n} &= B_{l,m-1,n+1} - a_2^2 B_{l,m,n+1} \end{aligned} \quad (n < 0) \tag{8}$$

аналогичны формулам (2) и позволяют выразить любой обобщенный внутренний потенциальный фактор через собственно внутренние потенциальные факторы эллиптического диска

$$B_{l,m} = B_{l,m,0}(0) = \frac{\pi a_1 a_2}{2} \int\limits_0^\infty \frac{du}{(a_1^2 + u)^l (a_2^2 + u)^m Q(u)}. \tag{9}$$

Основные соотношения для внутренних потенциальных факторов $B_{l,m}$ можно получить из формул (3), (4) и (6), полагая в них $n = 0$ и $\xi = 0$. В связи с фактическим уменьшением числа индексов с трех до двух соответственно сокращается и количество получаемых при этом уравнений. Так, три соотношения (3) заменяются одним:

$$(a_1^2 - a_2^2)\, B_{l+1,m+1} = B_{l,m+1} - B_{l+1,m}. \tag{10}$$

Когда какой-либо из двух индексов равен нулю, следует пользоваться рекуррентными формулами

$$(2l+3)\, a_1^2 (a_1^2 - a_2^2)\, B_{l+2,0} = (2l+2)(2a_1^2 - a_2^2)\, B_{l+1,0} - (2l+1)\, B_{l,0},$$

$$(2m+3)\, a_2^2 (a_1^2 - a_2^2)\, B_{0,m+2} = (2m+2)(a_1^2 - 2a_2^2)\, B_{0,m+1} + (2m+1)\, B_{0,m}, \tag{11}$$

вытекающими из формул (4). Уравнение (5) не имеет аналогии для внутренних потенциальных факторов, а уравнение (6) при $n=0$ и $\xi=0$ переходит в такое:

$$a_1^2(2l+1)B_{l+1,m}+a_2^2(2m+1)B_{l,m+1}=(2l+2m+1)B_{l,m}. \qquad (12)$$

Отметим, что линейные рекуррентные уравнения (8), (10) и (11) позволяют выражать обобщенные внутренние потенциальные факторы $B_{l,m,n}$ (l, $m=0, 1, 2, \ldots, n=0, -1, -2,\ldots$) через три величины $B_{0,0}$, $B_{1,0}$ и $B_{0,1}$, не являющиеся, однако, независимыми. Связывающее их соотношение

$$a_1^2B_{1,0}+a_2^2B_{0,1}=B_{0,0} \qquad (13)$$

следует из уравнения (12) при $l=m=0$. Явные выражения для этих факторов можно получить из формул (9):

$$B_{0,0}=\pi a_2K(\varkappa),$$
$$B_{1,0}=\pi a_2(a_1^2-a_2^2)^{-1}[K(\varkappa)-E(\varkappa)],$$
$$B_{0,1}=\pi a_2^{-1}(a_1^2-a_2^2)^{-1}[a_1^2E(\varkappa)-a_2^2K(\varkappa)], \qquad (14)$$

где K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно с аргументом $\varkappa=[1-a_2^2/a_1^2]^{1/2}$.

Несколько иначе обстоит дело с вычислением обобщенных внешних потенциальных факторов. Линейные рекуррентные формулы (2), (3) и (4) дают возможность выразить любую величину $B_{l,m,n}(\xi)$ (l, $m=0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, n=0, \pm1, \pm2, \ldots$) через факторы $B_{0,0,0}(\xi)$, $B_{1,0,0}(\xi)$, $B_{0,1,0}(\xi)$ и $B_{0,0,1}(\xi)$, связанные между собой соотношениями

$$B_{1,0,0}(\xi)+B_{0,1,0}(\xi)+B_{0,0,1}(\xi)=\pi a_1a_2[Q(\xi)]^{-1},$$
$$a_1^2B_{1,0,0}(\xi)+a_2^2B_{0,1,0}(\xi)=B_{0,0,0}(\xi)-\pi a_1a_2\xi[Q(\xi)]^{-1}, \qquad (15)$$

вытекающими из соотношений (6) и (7) при $l=m=n=0$. Эти соотношения позволяют ограничиться вычислением любых двух факторов из четырех вышеуказанных. Производя замену переменной $u=u_1+\xi$ в интегралах, определяющих величины $B_{1,0,0}(\xi)$, $B_{0,1,0}(\xi)$ и $B_{0,0,1}(\xi)$, получаем

$$B_{1,0,0}(\xi)=\frac{\pi a_1a_2}{b_1b_2b_3}M_{100},\quad B_{0,1,0}(\xi)=\frac{\pi a_1a_2}{b_1b_2b_3}M_{010},$$
$$B_{0,0,1}(\xi)=\frac{\pi a_1a_2}{b_1b_2b_3}M_{001},$$

где $b_1^2=a_1^2+\xi$; $b_2^2=a_2^2+\xi$; $b_3^2=\xi$, а M_{100}, M_{010} и M_{001} — определенные в работе [1] факторы размагничивания трехосного эллипсоида с полуосями $b_1>b_2>b_3$. Там же даны явные выражения факторов размагничивания через неполные эллиптические интегралы первого и второго рода и приведены подробные таблицы значений этих факторов для различных отношений полуосей эллипсоида.

1. *Муратов Р. З.* Потенциалы эллипсоида.— М. : Атомиздат, 1976.— 143 с.
2. *Kassir M. K., Sih G. C.* Three-dimensional crack problems.— Leyden : Noordhoff, 1975.— 452 p.
3. *Pacelli M.* Esame di una successione di potenziali di strato ellittico con applicazione a problemi armonici nello spazio e nel semispazio.— Ann. Scnola norm. super. Pisa, 1955, 9, N 1/2, p. 1—22.
4. *Walpole L. J.* Some elastostatic and potential problems for an elliptic disc.— Proc. Cambridge Phil. Soc., 1970, 67, N 1, p. 225—235.

Институт механики АН УССР

Поступила в редколлегию
18.09.79