

момента времени $\tau = \tau_n$ теплонасыщения. На рис. 1 представлены профили оптимальных суммарных температурных полей (19), соответствующих $\rho_1^* = 1$, условиям локального нагрева $T(\rho_0) = T_*$, $T(\rho_1) = T_{**}$, $T(1) = T_{**}$ при $T_{**} = 100^\circ \text{C}$ для $k_1 = 0$, $n_1 = 1$ (сплошные) и $k_1 = 1$, $n_1 = 1$ (штриховые линии). Цифрами 1, 2, 3 обозначены графики, соответствующие $\sigma_0 = -15$; -10 ; -5 кг/мм^2 . Из этого рисунка видно, что радиальные усилия σ_1 на краю пластинки $\rho = 1$ зависят от величины кольцевого напряжения

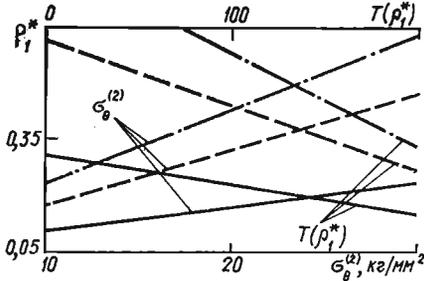


Рис. 3

ограничению на кольцевое напряжение $\sigma_\theta \leq \sigma_\theta^{(2)}$ для $\sigma_\theta^{(2)} = 25 \text{ кг/мм}^2$ (кривые 2) для $\rho_1 = 0,6$, $\rho_1^* = 0,4$ (сплошные) и $\rho_1 = 0,3$, $\rho_1^* = 0,2$ (штриховые линии).

На рис. 3 представлены графики изменения параметра ρ_1^* , характеризующего границу области $\rho_1^* \leq \rho \leq 1$, ограничений кольцевых растягивающих напряжений в зависимости от величины ограничений $\sigma_\theta^{(2)}$ для оптимальных температурных полей (19) при $k_1 = 1$, $n_1 = 1$ и $\rho_1 = 0,3$ (сплошные), $\rho_1 = 0,45$ (штриховые) и $\rho_1 = 0,6$ (штрихпунктирные линии). На этом же рисунке соответствующими линиями представлены графики температур $T(\rho_1^*)$, которые достигаются в сечении ρ_1^* .

1. Винокуров В. А. Сварочные деформации и напряжения.— М. : Машиностроение, 1968.— 236 с.
2. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление.— М. : Физматгиз, 1961.— 228 с.
3. Григолюк Э. И., Подстригач Я. С., Бурак Я. И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин.— Киев : Наук. думка, 1979.— 364 с.
4. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках.— Киев : Наук. думка, 1972.— 308 с.
5. Рыкалин Н. Н. Тепловые основы сварки.— М. ; Л. : Изд-во АН СССР, 1947.— 271 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 20.09.79

УДК 539.4.014 : 621.785.2 : 621.791.052

Я. П. Романчук, Н. И. Полищук

ОПТИМАЛЬНЫЙ ЛОКАЛЬНЫЙ ПОДОГРЕВ ПЛАСТИНКИ ДВИЖУЩИМСЯ ТЕМПЕРАТУРНЫМ ПОЛЕМ

Рассмотрим отнесенную к декартовой системе координат x^*oy^* свободную на краях тонкую прямоугольную пластинку длины l , ширины m и толщины $2h$. Пластинка находится под воздействием стационарного в подвижной системе координат hou ($x = x^* - vt$, $y = y^*$) температурного поля

$$T_0(x) = \frac{q}{4\pi\lambda h} e^{-\frac{vx}{2a}} K_0\left(x \sqrt{\frac{v^2}{4a^2} + \frac{b}{a}}\right), \quad (1)$$

где K_0 — функция Бесселя II рода нулевого порядка от мнимого аргумента; a, b — коэффициенты теплопроводности и теплоотдачи. Такое поле соответствует профилю в плоскости $y = 0$ квазистационарного температурного поля линейного источника тепла мощности q , движущегося в направлении оси x с постоянной скоростью v [3].

Ставится задача об определении такого температурного поля подогрева $T_1(x)$ зоны $x_2 \leq x \leq x_1$ ($x < 0$), дополнительного к температурному полю $T_0(x)$, при котором в зоне подогрева обеспечиваются условия упругого деформирования пластинки.

При решении задачи воспользуемся методикой расчета, предложенной в работе [1], в которой определяются оптимальные температурные поля предварительного локального подогрева свариваемых пластин для уменьшения уровня продольных остаточных напряжений и деформаций. При определении напряженно-деформированного состояния пластинки температурную зависимость характеристик материала будем учитывать приближенно, принимая значения модуля упругости E и предела текучести σ_T равными E_0 и σ_0 при $T \leq T_k$, а при $T > T_k$ — равными нулю. Здесь E_0, σ_0 — значения E и σ_T при нормальной температуре; T_k — температура, выше которой материал пластины теряет упругие свойства.

Для заданного температурного поля $T(x)$ в области пластинки, где $T \leq T_k$, отличные от нуля поперечные напряжения запишутся в виде $\sigma_y = E(C_1x + C_2 - \alpha T)$, где

$$C_1 = \int_{-a_1(\tau)}^{a_2(\tau)} \left\{ - \frac{2}{[a_2(\tau) - a_1(\tau)][a_2(\tau) + a_1(\tau)]^3} \left[\frac{4(a_2^3(\tau) + a_1^3(\tau))}{a_2(\tau) + a_1(\tau)} - 6(a_2(\tau) - a_1(\tau))x + \frac{2}{a_2^2(\tau) - a_1^2(\tau)} \right] \alpha T dx; \right.$$

$$C_2 = \int_{-a_1(\tau)}^{a_2(\tau)} \frac{1}{(a_2(\tau) + a_1(\tau))^3} \left[\frac{4(a_2^3(\tau) + a_1^3(\tau))}{a_2(\tau) + a_1(\tau)} - 6(a_2(\tau) - a_1(\tau))x \right] \alpha T dx, \quad (2)$$

при граничных условиях

$$\int_{-a_1(\tau)}^{a_2(\tau)} \sigma_y dx = 0, \quad \int_{-a_1(\tau)}^{a_2(\tau)} \sigma_y x dx = 0, \quad (3)$$

причем $a_1(\tau) = -v\tau$, $a_2(\tau) = l - v\tau$, $0 \leq v\tau \leq l$,

α — линейный коэффициент температурного расширения.

В качестве критерия оптимальности принимаем функционал энергии формоизменения пластинки, который, согласно работе [1], представляется в виде

$$V[T] = \frac{2h(1+\nu+\nu^2)}{3(1+\nu)} \int_{-a_1(\tau)}^{a_2(\tau)} E \left\{ \int_{-a_1(\tau)}^{a_2(\tau)} - \frac{2}{[a_2(\tau) - a_1(\tau)][a_2(\tau) + a_1(\tau)]^3} \times \right.$$

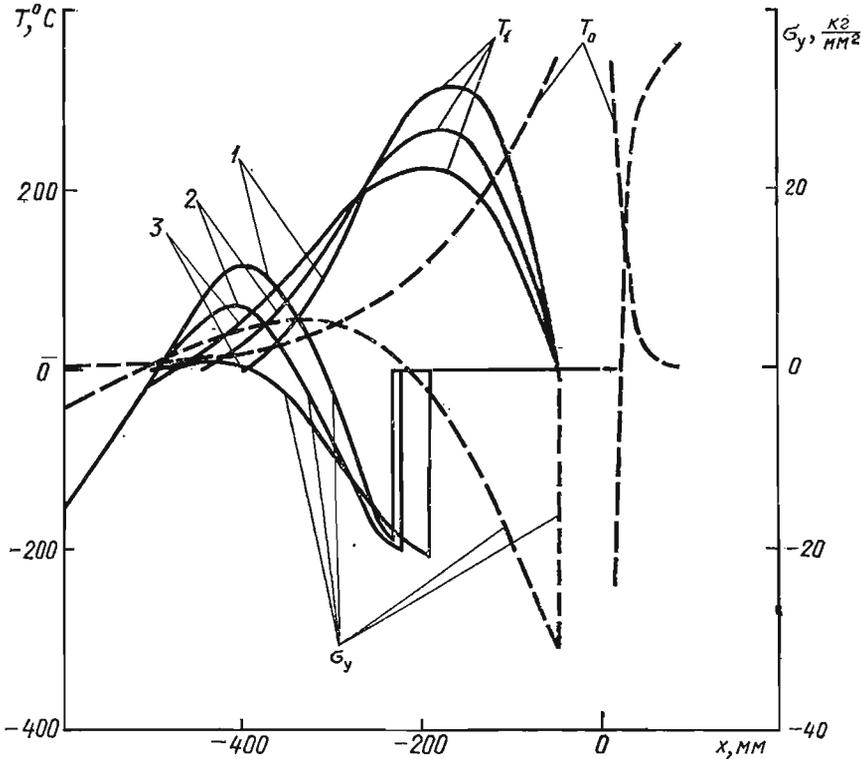
$$\times \left[\frac{4(a_2^3(\tau) + a_1^3(\tau))}{a_2(\tau) + a_1(\tau)} - 6(a_2(\tau) - a_1(\tau))x \right] + \frac{2}{a_2^2(\tau) - a_1^2(\tau)} \left. \right\} \alpha T dx \Bigg\} x +$$

$$+ \int_{-a_1(\tau)}^{a_2(\tau)} \left\{ \frac{1}{(a_2(\tau) + a_1(\tau))^3} \left[\frac{4(a_2^3(\tau) + a_1^3(\tau))}{a_2(\tau) + a_1(\tau)} - 6(a_2(\tau) - a_1(\tau))x \right] \alpha T dx - \alpha T \right\}^2 dx, \quad (4)$$

где $T = T_0 + T_1$ — суммарное температурное поле; ν — коэффициент Пуассона.

Формулируется следующая вариационная задача: на множестве температурных полей найти такие, которые обеспечивают минимум функционала (4) при дополнительных ограничениях на суммарное температурное поле $T(x)$ вида

$$G_{II} = \int_{-\alpha_{1i}}^{\alpha_{2j}} x^i T(x) [S_-(x-x_2) - S_+(x-x_1)]. \quad (5)$$



Из необходимого условия [2] минимума функционала (4) с учетом условий (3), (5) получаем оптимальное решение

$$T(x) = \sum_{i=0}^n \gamma_i x^i [S_-(x-x_2) - S_+(x-x_1)], \quad (6)$$

где γ_i — приведенные множители Лагранжа, определяемые из дополнительных ограничений на температурное поле подогрева и напряженное состояние; S_{\pm} — единичные функции скачка.

В качестве примера рассмотрена задача о выделении из множества (6) температурного поля дополнительного подогрева $T_1 = T - T_0$ зоны $x_2 \leq x \leq x_1$ при следующих условиях:

$$\begin{aligned} T_1(x_1) = 0, \quad T_1(x_2) = 0, \\ \frac{dT(x_2)}{dx} = 0, \quad \sigma_y^{(c)}(x_m) = k\sigma_T. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\sigma_y^{(c)}$ — напряжения, обусловленные температурным полем $T(x) |k| < 1$; x_m — сечение, в котором поперечные напряжения, вызванные температурным полем (1) без подогрева, достигают предела текучести σ_T . Для упрощения вычисления квадратур при определении констант C_1, C_2 температурное поле (1) аппроксимируем функцией вида

$$T_0(x) = \begin{cases} A_{01} e^{b_{01}x + c_{01}x^2} & \text{при } x < 0, \\ A_{02} e^{b_{02}x + c_{02}x^2} & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (8)$$

При этом получим выражения для напряжений σ_y , вызванных суммарным температурным полем (6):

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(c)} &= E_0(C_1x + C_2 - \alpha A_{01}e^{b_{01}x + c_{01}x^2}) \quad \text{при } a_1 \leq x \leq x_2, \\ &\quad x_1 \leq x \leq x_0, \\ \sigma_y^{(c)} &= E_0\left(C_1x + C_2 - \alpha \sum_{i=0}^n \gamma_i x^i\right) \quad \text{при } x_2 \leq x \leq x_1, \\ \sigma_y^{(c)} &= E_0(C_1x + C_2 - \alpha A_{02}e^{b_{02}x + c_{02}x^2}) \quad \text{при } x_{01} \leq x \leq a_2, \\ \sigma_y^{(c)} &= 0 \quad \text{при } x_0 \leq x \leq x_{01}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $x = x_0$; $x = x_{01}$ — сечения, в которых температура равна T_k .

Числовые исследования температурных полей подогрева (7) и напряжений в прямоугольной пластинке длины $l = 660$ мм из материала М-40 ($E_0 = 7100$ кг/мм², $\sigma_0 = 31$ кг/мм², $\alpha = 24,2$ 1/град, $T_k = 343^\circ$ С) при $q = 450$ кал/с, $c = 0,21$ кал/г · град, $\gamma = 2,75$ г/см³, $\lambda = 0,34$ кал/см × с · град проведены для фиксированного момента времени $\tau_1 = 175$ с ($a_1 = -580$ мм, $a_2 = 80$ мм).

На рисунке при $k = -0,5$, $x_0 = x_1 = 48$ мм представлены графики температурного поля локального подогрева и вызванные суммарным полем напряжения (сплошные линии), а также графики температурного поля (8) и соответствующие напряжения (штриховые линии). Кривые 1—3 соответствуют значениям $x_2 = 400, 450, 500$ мм. Из рисунка видно, что максимальный уровень температурных полей подогрева понижается с увеличением зоны подогрева. При этом расстояние от начала подвижной системы координат до сечения, в котором он достигается, увеличивается, составляя 165, 180, 200 мм соответственно. Уровни поперечных напряжений, обусловленных суммарным температурным полем, с увеличением ширины зоны подогрева уменьшаются.

Приведенная здесь расчетная схема определения оптимальных температурных полей подогрева пластинки движущимся температурным полем может быть использована при разработке методики оптимизации поперечных сварочных напряжений.

1. Бурак Я. И., Романчук Я. П., Казимиров А. А., Моргул В. П. Выбор оптимального поля предварительного подогрева пластин при сварке. — Автомат. сварка, 1979, № 5, с. 15—19.
2. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. — М.: Физматгиз, 1961. — 228 с.
3. Рыкалин Н. Н. Тепловые основы сварки. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947. — 271 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 24.09.79

УДК 539.3.01

А. Н. Бородачев

К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИСКА

Решение краевых задач линейной однородной и изотропной теории упругости для эллиптического диска, к которым относятся задачи механики разрушения о плоской эллиптической трещине в неограниченной среде, контактные задачи о жестком штампе эллиптического сечения на полупространстве и задачи о деформировании неограниченного тела, содержащего тонкое жесткое эллиптическое включение, сводится в общем случае полиномиальных граничных условий к построению трех ньютоновских потенциалов эллиптического диска. Наиболее общий и естественный метод выбора плотностей