

из соотношений (24), (25), следует пользоваться до того момента времени, при котором $\varphi(\tau) \leq \theta_i$ и $\theta|_{z=0} \leq \theta_p$. Если при $\tau = \tau_{i,p-1}$ либо $\tau = \tau_{i-1,p}$ становится соответственно $\varphi > \theta_i$ либо $\theta|_{z=0} > \theta_p$, то A в (24) определяется из нового начального условия: $\varphi|_{\tau=\tau_{i,p-1}} = \varphi_{i,p-1}$ либо $\varphi|_{\tau=\tau_{i-1,p}} = \varphi_{i-1,p}$. Время $\tau_{i,p-1}$ определяется из формулы (24) при замене φ на θ_i , а $\tau_{i-1,p}$ — из формулы (23) при $z = 0$ и замене θ на θ_p .

На ЭВМ произведен расчет температурного поля пластинки, изготовленной из углеродистой стали 20, в различные моменты времени (таблица). При этом на первом и втором этапах в формулах (8) и (9) выбирали соответственно $i = 1, 2$ и $i = 1, 2, 3$, причем $c_1 = 32,827 \frac{\text{ч}}{\text{м}^2}$, $c_2 = 62,294 \frac{\text{ч}}{\text{м}^2}$, $c_3 = 47,619 \frac{\text{ч}}{\text{м}^2}$, $\lambda_1 = 36,85 \frac{\text{ккал}}{\text{м} \cdot \text{ч} \cdot \text{°C}}$, $\lambda_2 = 27,2142 \frac{\text{ккал}}{\text{м} \cdot \text{ч} \cdot \text{°C}}$, $\lambda_3 = 26,1 \frac{\text{ккал}}{\text{м} \cdot \text{ч} \cdot \text{°C}}$, $\alpha = 282,2 \frac{1}{\text{м}}$, $\theta_1 = 22\,110 \frac{\text{ккал}}{\text{м} \cdot \text{ч}}$, $\theta_2 = 30\,000 \frac{\text{ккал}}{\text{м} \cdot \text{ч}}$, $q = 15 \cdot 10^6 \frac{\text{ккал}}{\text{м}^2 \cdot \text{ч}}$, $d = 0,004$ м. Начальная температура пластинки и температура внешней среды приняты равными 100 °C .

1. Био М. Вариационные принципы в теории теплообмена.— М.: Энергия, 1975.— 209 с.
Львовский университет

Поступила в редколлегию
19.11.79

УДК 539.377

Л. П. Беседина

**ОПТИМАЛЬНЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ
ЛОКАЛЬНОГО ПОДОГРЕВА
КРУГОВОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ ТОЧЕЧНОЙ СВАРКЕ**

Рассмотрим тонкую круговую пластинку радиуса R , нагреваемую в промежутке времени $0 \leq \tau \leq \tau_n$ неподвижным постоянным по толщине сварным источником тепла мощности q . В условиях конвективного теплообмена с внешней средой усредненное по толщине температурное поле определяется по формулам [4, 5]

$$T_0(\rho, \tau) = \frac{q}{4\pi\lambda h} K_0(\rho, \omega) \quad \text{для } 0 \leq \tau \leq \tau_n, \quad (1)$$

$$T_0(\rho, \tau) = \frac{q}{4\pi\lambda h} [K_0(\rho, \omega) - K_0(\rho, \omega - \omega_n)] \quad \text{для } \tau_n \leq \tau < \infty,$$

где

$$K_0(\rho, \omega) = \int_0^{\omega} e^{-\frac{\kappa R \rho}{2} \left(\xi + \frac{1}{\xi} \right)} \frac{d\xi}{\xi};$$

$\omega = \frac{2\kappa a \tau}{R\rho}$; $\omega_n = \frac{2\kappa a \tau_n}{R\rho}$; $\kappa = \frac{\alpha_0}{\lambda h}$; ρ, φ — полярная система координат ($\rho = \frac{r}{R}$, $r^2 = x^2 + y^2$); α_0, a, λ — коэффициенты теплоотдачи, температуропроводности, теплопроводности соответственно; $2h$ — толщина пластинки; $\delta(\rho)$ — дельта-функция Дирака; $S_+(\tau)$ — асимметричная единичная функция. Примем, что материал пластинки упругоэластический. Температурную зависимость характеристик материала будем учитывать по следующей приближенной схеме:

$$\sigma_T(T) = \begin{cases} \sigma_T = \text{const} & \text{для } T < T_*, \\ 0 & \text{для } T \geq T_*. \end{cases} \quad (2)$$

Пусть высокоградиентное в окрестности сварного источника температурное поле (1) приводит к термопластическому деформированию области $\rho_0(\tau) \leq \rho \leq \rho_0^*(\tau)$. В процессе нагрева граница области $\rho = \rho_0(\tau)$ определяется из уравнения изотермы

$$T_0(\rho_0, \tau) = T_* \quad (3)$$

Зону $0 \leq \rho \leq \rho_0(\tau)$ внутри изотермы (3) согласно принятой схеме (2) и работе [1] будем считать свободной от напряжений.

Напряженное состояние области $\rho_0(\tau) \leq \rho \leq 1$ пластинки, вызванное температурным полем $T(\rho, \tau)$, характеризуется радиальными σ_r и кольцевыми σ_θ напряжениями, которые находятся из системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_r}{d\rho} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{\rho} &= 0, \\ \frac{d}{d\rho} (\sigma_\theta - \nu\sigma_r) + E\alpha \frac{dT}{d\rho} + (1 + \nu) \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{\rho} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

При заданных на краю $\rho = 1$ радиальных усилиях σ_1 условия на краях области $\rho_0(\tau) \leq \rho \leq 1$ будут такими:

$$\sigma_r(\rho_0) = 0, \quad \sigma_r(1) = \sigma_1. \quad (5)$$

Здесь α — коэффициент линейного температурного расширения; ν — коэффициент Пуассона. В этом случае напряжения в области $\rho_0(\tau) \leq \rho \leq 1$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_r &= E \left[\frac{(\rho^2 - \rho_0^2)'}{(1 - \rho_0^2) \rho^2} \frac{\sigma_1}{E} + \frac{\alpha(\rho^2 - \rho_0^2)}{(1 - \rho_0^2) \rho^2} \int_{\rho_0}^1 \rho T d\rho - \frac{\alpha}{\rho^2} \int_{\rho_0}^{\rho} \xi T d\xi \right], \\ \sigma_\theta &= E \left[\frac{(\rho^2 + \rho_0^2)}{(1 - \rho_0^2) \rho^2} \frac{\sigma_1}{E} + \frac{\alpha(\rho^2 - \rho_0^2)}{(1 - \rho_0^2) \rho^2} \int_{\rho_0}^1 \rho T d\rho + \frac{\alpha}{\rho^2} \int_{\rho_0}^{\rho} \xi T d\xi - \alpha T \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть радиальное напряжение σ_r на краю пластинки $\rho = 1$ задано в виде

$$\sigma_1 = \frac{(1 - \rho_0^2) \rho_*^2}{\rho_*^2 + \rho_0^2} \left[\sigma_* + E\alpha \left(T_* - \frac{1}{\rho_*^2} \int_{\rho_0}^{\rho_*} \rho T d\rho \right) \right] - E\alpha \int_{\rho_0}^1 \rho T d\rho. \quad (7)$$

где

$$\sigma_* = \sigma_\theta(\rho_*), \quad T_* = T(\rho_*) \quad (\rho_0(\tau) \leq \rho_* < 1). \quad (8)$$

Тогда формулы (6) принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{(\rho^2 - \rho_0^2) \rho_*^2}{(\rho_*^2 + \rho_0^2) \rho^2} \left[\sigma_* + E\alpha \left(T_* - \frac{1}{\rho_*^2} \int_{\rho_0}^{\rho_*} \rho T d\rho \right) \right] - \frac{E\alpha}{\rho^2} \int_{\rho_0}^{\rho} \xi T d\xi, \\ \sigma_\theta &= \frac{(\rho^2 + \rho_0^2) \rho_*^2}{(\rho_*^2 + \rho_0^2) \rho^2} \left[\sigma_* + E\alpha \left(T_* - \frac{1}{\rho_*^2} \int_{\rho_0}^{\rho_*} \rho T d\rho \right) \right] + \frac{E\alpha}{\rho^2} \int_{\rho_0}^{\rho} \xi T d\xi - E\alpha T. \end{aligned} \quad (9)$$

Определим такое дополнительное к $T_0(\rho, \tau)$ температурное поле $T_1(\rho, \tau)$ подогрева области $\rho_*(\tau) \leq \rho \leq 1$ пластинки, для которого суммарное температурное поле

$$T(\rho, \tau) = T_0(\rho, \tau) + T_1(\rho, \tau) \quad (10)$$

при заданных ограничениях на температуру $T(\rho, \tau)$ и напряжения обеспечивает условия, оптимально близкие к условиям упругого деформирования. В качестве критерия оптимизации возьмем функционал энергии формоизменения, который с учетом тепловой деформации в перпендикулярном к плоскости пластинки направлении записывается для области $\rho_*(\tau) \leq \rho \leq 1$ в

виде

$$U[\sigma_r, \sigma_\theta] = \frac{4\pi h}{3E(1+\nu)} \int_{\rho_*}^1 [(1+\nu+\nu^2)(\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2) - (1+4\nu+\nu^2)\sigma_r\sigma_\theta] \rho d\rho. \quad (11)$$

С учетом формул (9) функционал (11) представляется заданным на множестве функций температурных полей $T(\rho, \tau)$.

Ставится вариационная задача о минимизации функционала (11) на множестве допустимых функций температурных полей $T(\rho, \tau)$, обеспечивающих условия стационарности следующих функционалов:

$$U_{ij}[T] \equiv \int_{\rho_*}^{\rho_j} \rho^i T(\rho, \tau) d\rho = A_{ij}(\tau), \quad i = \overline{k_j}, k_j + n_j; \quad j = \overline{1, m} \quad (12)$$

при условиях, что радиальное σ_r и кольцевое σ_θ напряжения могут изменяться в заданных пределах:

$$\sigma_r^{(1)} \leq \sigma_r \leq \sigma_r^{(2)}, \quad \sigma_\theta^{(1)} \leq \sigma_\theta \leq \sigma_\theta^{(2)}, \quad (13)$$

а функция $T(\rho, \tau)$ положительна и ограничена значением kT_* в области $\rho_{**} \leq \rho \leq 1$ ($\rho_* < \rho_{**}$, $k < 1$).

С учетом сформулированных ограничений функции $T(\rho, \tau)$, $\sigma_r(\rho, \tau)$, $\sigma_\theta(\rho, \tau)$ представим в виде

$$\begin{aligned} \sigma_r(\rho, \tau) &= \frac{\sigma_r^{(2)} - \sigma_r^{(1)}}{2} \left[\sin \varphi_1(\rho, \tau) + \frac{\sigma_r^{(2)} + \sigma_r^{(1)}}{\sigma_r^{(2)} - \sigma_r^{(1)}} \right], \\ \sigma_\theta(\rho, \tau) &= \frac{\sigma_\theta^{(2)} - \sigma_\theta^{(1)}}{2} \left[\sin \varphi_2(\rho, \tau) + \frac{\sigma_\theta^{(2)} + \sigma_\theta^{(1)}}{\sigma_\theta^{(2)} - \sigma_\theta^{(1)}} \right]; \end{aligned} \quad (14)$$

$$T(\rho, \tau) = \frac{kT_*}{2} [1 + \sin \varphi_3(\rho, \tau) [S_-(\rho - \rho_{**}) - S_+(\rho - 1)]], \quad (15)$$

где $\varphi_i(\rho, \tau)$ — неизвестные функции.

Таким образом, решение задачи сводится к нахождению экстремалей функционала [2, 3]

$$\begin{aligned} U^* &= \frac{4\pi E h}{3(1+\nu)} \int_{\rho_*}^1 \left\{ \rho [(1+\nu+\nu^2)(\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2) - (1+4\nu+\nu^2)\sigma_r\sigma_\theta] + \right. \\ &+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=k_i}^{k_j+n_j} \lambda_{ij}(\tau) \rho^i \alpha T(\rho, \tau) [S_-(\rho - \rho_{**}) - S_+(\rho - \rho_j)] + \\ &+ \lambda_1(\rho, \tau) \left[\sigma_r - \frac{\sigma_r^{(2)} - \sigma_r^{(1)}}{2} \left(\sin \varphi_1(\rho, \tau) + \frac{\sigma_r^{(2)} + \sigma_r^{(1)}}{\sigma_r^{(2)} - \sigma_r^{(1)}} \right) \right] + \\ &+ \lambda_2(\rho, \tau) \left[\sigma_\theta - \frac{\sigma_\theta^{(2)} - \sigma_\theta^{(1)}}{2} \left(\sin \varphi_2(\rho, \tau) + \frac{\sigma_\theta^{(2)} + \sigma_\theta^{(1)}}{\sigma_\theta^{(2)} - \sigma_\theta^{(1)}} \right) \right] + \\ &+ \lambda_3(\rho, \tau) \left[\alpha T - \alpha \frac{kT_*}{2} (1 + \sin \varphi_3(\rho, \tau) (S_-(\rho - \rho_{**}) - S_+(\rho - 1))) \right] \Big\} d\rho \end{aligned} \quad (16)$$

на множестве функций $T(\rho, \tau)$, $\varphi_i(\rho, \tau)$, которые удовлетворяют уравнениям (9), (14), (15).

Из необходимого условия экстремума приходим к системе уравнений Эйлера

$$T(\rho, \tau) - a \int_{\rho_*}^1 \rho T d\rho - b - \sum_{i=1}^m \sum_{j=k_i}^{k_j+n_j} \lambda_{ij}(\tau) \rho^{i-1} [S_-(\rho - \rho_{**}) - S_+(\rho - \rho_j)] +$$

$$+ \int_0^1 \frac{1}{\xi^2} (\gamma_1(\xi, \tau) - \gamma_2(\xi, \tau)) d\xi - \frac{\gamma_2(\rho, \tau)}{\rho} - \frac{\gamma_3(\rho, \tau)}{\rho} [S_-(\rho - \rho_{**}) - S_+(\rho - 1)] = 0, \quad (17)$$

$$\gamma_1(\rho, \tau) \cos \varphi_1(\rho, \tau) = 0, \quad \gamma_2(\rho, \tau) \cos \varphi_2(\rho, \tau) = 0,$$

$$\gamma_3(\rho, \tau) \cos \varphi_3(\rho, \tau) [S_-(\rho - \rho_{**}) - S_+(\rho - 1)] = 0,$$

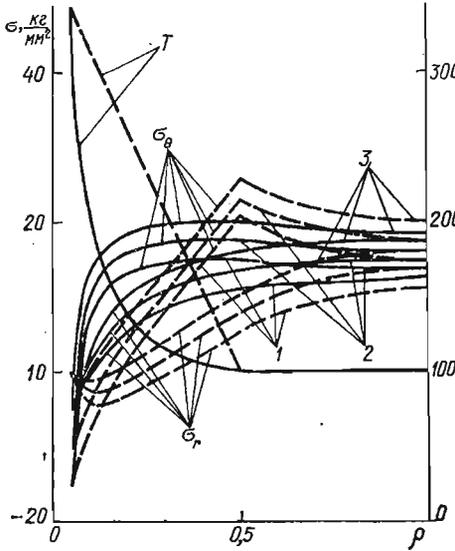


Рис. 1

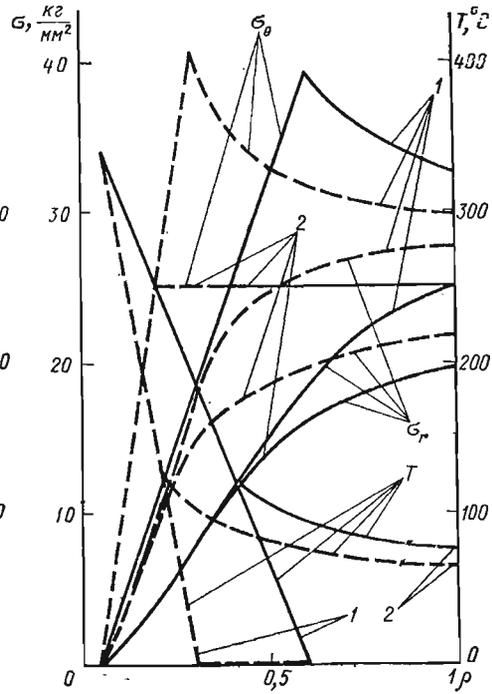


Рис. 2

где

$$a = \frac{3(1+\nu)^2}{2(1+\nu+\nu^2)\alpha};$$

$$b = \frac{1}{4(1+\nu+\nu^2)} [3(1+\nu)^2 \rho_1^2 + (1-\nu)^2] \left(\frac{\sigma_{**}}{\alpha E} - T_* \right). \quad (18)$$

Рассмотрим случай, когда температура, радиальные и кольцевые сжимающие напряжения не превышают допустимых, т. е. необходимо учитывать только ограничения на величину растягивающих кольцевых напряжений $\sigma_\theta \leq \sigma_\theta^{(2)}$ ($\lambda_1 = 0, \lambda_3 = 0$). При $m = 1$ получаем

$$T(\rho, \tau) = \left\{ B_0(\tau) + \sum_{i=k}^{k_1+n_1} \lambda_{i1}(\tau) \rho^{i-1} [S_-(\rho - \rho_0) - S_+(\rho - \rho_1)] \right\} [S_-(\rho - \rho_0) - S_+(\rho - \rho_1^*)] + \left\{ \frac{1}{(1+\nu)\alpha} \left[\frac{B_1(\tau)}{\rho} + (1+\nu) B_2(\tau) \right] - \frac{1-\nu}{E\alpha} \sigma_\theta^{(2)} \right\} S_+(\rho - \rho_1^*). \quad (19)$$

Здесь $B_i(\tau), \lambda_{i1}(\tau)$ — параметры, которые при заданном допустимом напряжении $\sigma_\theta^{(2)}$ определяются из условий локального нагрева и сопряжения температурного поля и напряжений σ , для областей $\rho_0 \leq \rho \leq \rho_1^*$, где $\sigma_\theta < \sigma_\theta^{(2)}$, и $\rho_1^* < \rho \leq 1$, где $\sigma_\theta = \sigma_\theta^{(2)}$ в сечении $\rho = \rho_1^*$.

Численные исследования оптимальных суммарных температурных полей и напряжений в пластинке из М-40 ($E = 7100 \text{ кг/мм}^2, \alpha = 24,2 \times 10^{-6} \text{ 1/град}, \nu = 0,3; T_* = 343^\circ \text{ C}$) в процессе сварки выполнены для

момента времени $\tau = \tau_n$ теплонасыщения. На рис. 1 представлены профили оптимальных суммарных температурных полей (19), соответствующих $\rho_1^* = 1$, условиям локального нагрева $T(\rho_0) = T_*$, $T(\rho_1) = T_{**}$, $T(1) = T_{**}$ при $T_{**} = 100^\circ\text{C}$ для $k_1 = 0$, $n_1 = 1$ (сплошные) и $k_1 = 1$, $n_1 = 1$ (штриховые линии). Цифрами 1, 2, 3 обозначены графики, соответствующие $\sigma_0 = -15$; -10 ; -5 кг/мм². Из этого рисунка видно, что радиальные усилия σ_1 на краю пластинки $\rho = 1$ зависят от величины кольцевого напряжения σ_0 в сечении $\rho = \rho_0$ и уменьшаются с увеличением последнего по абсолютной величине.

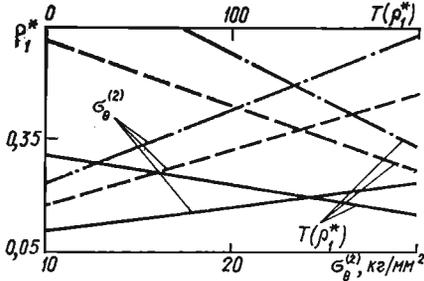


Рис. 3

ограничении на кольцевое напряжение $\sigma_\theta \leq \sigma_\theta^{(2)}$ для $\sigma_\theta^{(2)} = 25$ кг/мм² (кривые 2) для $\rho_1 = 0,6$, $\rho_1^* = 0,4$ (сплошные) и $\rho_1 = 0,3$, $\rho_1^* = 0,2$ (штриховые линии).

На рис. 3 представлены графики изменения параметра ρ_1^* , характеризующего границу области $\rho_1^* \leq \rho \leq 1$, ограничений кольцевых растягивающих напряжений в зависимости от величины ограничений $\sigma_\theta^{(2)}$ для оптимальных температурных полей (19) при $k_1 = 1$, $n_1 = 1$ и $\rho_1 = 0,3$ (сплошные), $\rho_1 = 0,45$ (штриховые) и $\rho_1 = 0,6$ (штрихпунктирные линии). На этом же рисунке соответствующими линиями представлены графики температур $T(\rho_1^*)$, которые достигаются в сечении ρ_1^* .

1. Винокуров В. А. Сварочные деформации и напряжения.— М. : Машиностроение, 1968.— 236 с.
2. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление.— М. : Физматгиз, 1961.— 228 с.
3. Григолюк Э. И., Подстригач Я. С., Бурак Я. И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин.— Киев : Наук. думка, 1979.— 364 с.
4. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках.— Киев : Наук. думка, 1972.— 308 с.
5. Рыкалин Н. Н. Тепловые основы сварки.— М. ; Л. : Изд-во АН СССР, 1947.— 271 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 20.09.79

УДК 539.4.014 : 621.785.2 : 621.791.052

Я. П. Романчук, Н. И. Полищук

ОПТИМАЛЬНЫЙ ЛОКАЛЬНЫЙ ПОДОГРЕВ ПЛАСТИНКИ ДВИЖУЩИМСЯ ТЕМПЕРАТУРНЫМ ПОЛЕМ

Рассмотрим отнесенную к декартовой системе координат x^*oy^* свободную на краях тонкую прямоугольную пластинку длины l , ширины m и толщины $2h$. Пластинка находится под воздействием стационарного в подвижной системе координат hou ($x = x^* - vt$, $y = y^*$) температурного поля

$$T_0(x) = \frac{q}{4\pi\lambda h} e^{-\frac{vx}{2a}} K_0\left(x \sqrt{\frac{v^2}{4a^2} + \frac{b}{a}}\right), \quad (1)$$