туру

$$\text{а) } A_m^*(p_1, r, \mu, \varphi)\, A_j^*(p_2, r, \mu, \varphi)\, \frac{1}{p_1 + p_2},$$

$$\text{б) } \left(1 + \frac{2\chi}{p_1 + p_2}\right) \frac{A_m^*(p_1, r, \mu, \varphi)}{p_1 + \chi}\, \frac{A_j^*(p_2, r, \mu, \varphi)}{p_2 + \chi},$$

то оно выражается так:

$$\text{а) } \int_0^t A_m(t_1 - \tau, r, \mu, \varphi)\, A_j(t_2 - \tau, r, \mu, \varphi)\, d\tau, \quad t = \min(t_1, t_2),$$

$$\text{б) } B_m(t_1, r, \mu, \varphi)\, B_j(t_2, r, \mu, \varphi) + 2\chi \int_0^t B_m(t_1 - \tau, r, \mu, \varphi)\, B_j(t_2 - \tau, r, \mu, \varphi) d\tau.$$

$$B(t, r, \mu, \varphi) = \int_0^t A(t - x, r, \mu, \varphi)\, e^{-\chi x} dx.$$

Полагая в полученных формулах $t_1 = t_2 = t$, получаем мощность D_T температурных полей в сплошном однородном изотропном шаре. При $\tau_r \equiv b_0 \to 0$ найдем основные характеристики стохастических квазистатических (обычных, классических) температурных полей в рассматриваемой области. При этом параметры β_1, β_2 и h позволяют выделить из общих формул решение задачи при задании на границе шара краевых условий первого, второго или третьего рода.

1. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций.— М. : Изд-во иностр. лит., 1949.— 798 с.
2. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций.— М. : Изд-во иностр. лит., 1952.— 476 с.
3. *Земанян А. Г.* Интегральные преобразования обобщенных функций.— М. : Наука, 1974.— 398 с.
4. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики.— М. : Высш. школа, 1970.— 710 с.
5. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного.— М. : Наука, 1973.— 736 с.
6. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности.—М. : Высш. школа, 1967.— 600 с.
7. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения.— М. : Физматгиз, 1963.— 251 с.
8. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика.— Киев : Наук. думка, 1976.— 310 с.
9. *Пугачев В. С.* Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления.— М. : Физматгиз, 1965.— 884 с.
10. *Семенюк В. В., Ленюк М. П.* Загальні температурні поля в суцільних однорідних сферичних тілах.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1978, № 3, с. 266—270.
11. *Снеддон И.* Преобразования Фурье.— М. : Изд-во иностр. лит., 1955.— 667 с.

Тернопольский финансово-экономический институт
Черновицкий университет

Поступила в редколлегию 10.05.79

УДК 517.958

В. Г. Костенко, П. П. Доманский, Н. И. Бугрий

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ С КОНВЕКТИВНЫМ ТЕПЛООБМЕНОМ И ИНТЕНСИВНЫМ ПОВЕРХНОСТНЫМ НАГРЕВОМ

Рассмотрим бесконечную пластинку толщины d, одна из поверхностей которой находится под воздействием теплового потока интенсивности q, а на другой происходит конвективный теплообмен с внешней средой. Начальная температура пластинки равна T_0. Требуется найти распределение температуры в пластинке с учетом температурной зависимости теплофизических характеристик ее материала.

Решение поставленной задачи сводится к нахождению решения уравнения теплопроводности

$$c^*(T)\frac{\partial T}{\partial z}=\operatorname{div}(\lambda(T)\operatorname{grad}T) \qquad (1)$$

в $\Pi_d\ \{0<z<d,\ -\infty<x,\ y<\infty,\ \tau>0\}$, удовлетворяющего условиям

$$\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z=0}=-q,\quad \left(\frac{\partial T}{\partial z}+\alpha T\right)\bigg|_{z=d}=\alpha T_c, \qquad (2)$$

$$T|_{\tau=0}=T_0. \qquad (3)$$

Здесь T — температура; τ — время; $\lambda(T)$ — коэффициент теплопроводности; $c^*(T)$ — удельная теплоемкость; T_c — температура внешней среды; α — коэффициент теплообмена. Применяя преобразование Кирхгофа

$$\theta=\int\limits_{T_0}^{T}\lambda(T)\,dT, \qquad (4)$$

задачу (1) — (3) сводим к решению уравнения

$$c(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial\tau}=\Delta\theta \quad \text{в } \Pi_d \qquad (5)$$

с условиями

$$\frac{\partial\theta}{\partial z}\bigg|_{z=0}=-q,\quad \left(\frac{\partial\theta}{\partial z}+\alpha T(\theta)\lambda(\theta)-\alpha\lambda(\theta)T_c\right)\bigg|_{z=d}=0, \qquad (6)$$

$$\theta|_{\tau=0}=0. \qquad (7)$$

Здесь $c(\theta)=\dfrac{c^*(T(\theta))}{\lambda(T(\theta))}$.

Допустим, что $\lambda(\theta)$ и $c(\theta)$ достаточно хорошо аппроксимируются кусочно-постоянными функциями, т. е.

$$\lambda(\theta)=\lambda_i,\quad \theta_{i-1}\leqslant\theta\leqslant\theta_i; \qquad (8)$$

$$c(\theta)=c_i,\quad \theta_{i-1}\leqslant\theta\leqslant\theta_i. \qquad (9)$$

Разобьем решение задачи (5) — (7) на два этапа. Предполагаем, что на первом из них тепло от нагреваемой поверхности $z=0$ еще не распространилось до поверхности пластинки $z=d$ и поэтому второе условие (6) не оказывает влияния на температурный режим пластинки. Второй этап возникает в тот момент, когда начинает оказывать влияние второе условие (6).

Решение задачи на первом этапе ищем в виде

$$\theta(z,\tau)=\frac{qf(\tau)}{2}\left(1-\frac{z}{f(\tau)}\right)^2, \qquad (10)$$

где $f(\tau)$ — глубина проникновения тепла в пластинке; $\theta(z,\tau)$ — фиктивная температура в точке z пластинки в момент времени τ. При этом представления (8) и (9) учитываются по схеме, изложенной ниже.

Если $0\leqslant\theta\leqslant\theta_1$, то, согласно работе [1], имеем

$$h=\int\limits_0^{\theta}c(\theta)\,d\theta=\int\limits_0^{\theta}c_1d\theta=c_1\theta,\quad F=\int\limits^{h}\theta dh=\int\limits^{\theta}c_1\theta d\theta=\frac{c_1}{2}\theta^2.$$

Суммарный тепловой потенциал V выражается формулой

$$V=\int\limits_0^{f}Fdz=\frac{c_1q^2f^3}{40}. \qquad (11)$$

Вектор теплового смещения H удовлетворяет уравнению $h=-\dfrac{\partial H}{\partial z}$, откуда $H = \int\limits_z hdz = \frac{c_1 q}{6f}(f-z)^3$. Диссипативная функция

$$D = \frac{1}{2}\int\limits_0 \dot{H}^2 dz = \frac{11 c_1^2 q^2 \dot{f}^2 f^3}{840}. \tag{12}$$

Обобщенная тепловая сила

$$Q = -\theta \frac{\partial H}{\partial f}\Big|_0^f = \frac{c_1 q^2 f^2}{6}. \tag{13}$$

Используя формулы (11) — (13), уравнение Лагранжа $\frac{\partial V}{\partial f} + \frac{\partial D}{\partial \dot{f}} = Q$ приводим к виду

$$f\dot{f} = \frac{7}{2c_1}. \tag{14}$$

Очевидно, что

$$f|_{\tau=0} = 0. \tag{15}$$

Решение задачи Коши (14), (15) имеет вид

$$f(\tau) = \sqrt{\frac{7\tau}{c_1}}. \tag{16}$$

Формулу (10), где $f(\tau)$ определяется по формуле (16), используем до момента времени τ_1, который определяется из условия $\theta|_{z=0} = \theta_1$. За время τ_1 тепло распространится на глубину $f_1 = \frac{2\theta_1}{q}$. Затем, если окажется, что $f_1 < d$, то, учитывая новое начальное условие для глубины проникновения $f|_{\tau=\tau} = f_1$, аналогично предыдущему используем формулу (10) с учетом того, что $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, и т. д.

Рассмотрим, например, случай, когда $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_k$. Тогда

$$h = \int\limits_0^\theta c(\theta)\,d\theta = \int\limits_0^{\theta_1} c_1 d\theta + \cdots + \int\limits_{\theta_{k-1}}^{\theta} c_k d\theta = a_k + c_k\theta,$$

$$F = \int\limits_0^h \theta dh = \int\limits_0^{\theta_1} c_1\theta d\theta + \cdots + \int\limits_{\theta_{k-1}}^{\theta} c_k \theta d\theta = b_k + \frac{c_k}{2}\theta^2.$$

Здесь $a_k = \sum\limits_{l=1}^{k-1}(c_l - c_{l+1})\theta_l$; $b_k = \frac{1}{2}\sum\limits_{l=1}^{k-1}(c_l - c_{l+1})\theta_l^2$. Затем находим $V = b_k f + \frac{c_k f^3 q^2}{40}$, $H = a_k(f-z) + \frac{c_k q}{6f}(f-z)^3$,

$$D = \frac{f\dot{f}^2}{2}\left(a_k^2 + \frac{11}{420}c_k^2 q^2 f^2 + \frac{a_k c_k q f}{4}\right), \quad Q = -\theta\frac{\partial H}{\partial f}\Big|_0^f = \left(a_k + \frac{c_k q f}{3}\right)\frac{fq}{2}.$$

Уравнение Лагранжа теперь принимает вид

$$\frac{\dot{f}\left(\frac{11}{420}c_k^2 q^2 f^3 + \frac{a_k c_k q f^2}{4} + a_k^2 f\right)}{\frac{11}{120}c_k q^2 f^2 + \frac{a_k q f}{2} - b_k} = 1. \tag{17}$$

При этом начальным условием для f будет такое:

$$f|_{\tau=\tau_{k-1}} = f_{k-1}, \tag{18}$$

где τ_{k-1} — время, за которое θ при $z = 0$ достигает значения θ_{k-1}, а f_{k-1} — глубина, на которую распространится тепло к моменту времени τ_{k-1}.

Решая задачу (17), (18), получаем неявную зависимость f от τ:

$$11c_k q f^2 + 90 a_k f + 120\int \frac{p_1 f + p_2}{p_3 f^2 + p_4 f + p_5}\,df = 77\tau q + B_k, \tag{19}$$

где

$p_1 = q(32a_k^2 + 22c_k b_k)$, $p_2 = 90a_k b_k$, $p_3 = 11c_k q^2$, $p_4 = 60a_k q$, $p_5 = -120b_k$, а константа B_k определяется из условия (18).

Таким образом, на первом этапе θ определяется формулой (10), где f находится из уравнения (19). Как только после нахождения τ_k и f_k оказывается, что $f_k \geqslant d$, переходим ко второму этапу. При этом представление фиктивной температуры следует подобрать так, чтобы удовлетворялись оба условия (6). Предположим, что первый этап закончился при $\tau = \tau_k$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \theta_k)$. Не умаляя общности, будем считать, что в это время на нагреваемой поверхности пластинки фиктивная температура $\theta = \theta_k$. Начальное условие (7) следует заменить на $\theta|_{\tau=\tau_k} = \theta_k^*(z)$, где $\theta_k^*(z)$ — распределение фиктивной температуры в пластинке в момент времени $\tau = \tau_k$, найденное из формулы (10).

Учитывая выражения (8), (9), при $z = d$ получаем

$$\theta|_{z=d} = \int\limits_{T_0}^{T|_{z=d}} \lambda(T)\,dT = \int\limits_{T_0}^{T_1} \lambda_1 dT + \cdots + \int\limits_{T_{i-1}}^{T|_{z=d}} \lambda_i dT = d_i + \lambda_i (T|_{z=d} - T_{i-1}),$$

откуда

$$T|_{z=d} = (\theta|_{z=d} - d_i)\frac{1}{\lambda_i} + T_{i-1}. \tag{20}$$

Предположим, что в какой-то промежуток времени фиктивная температура при $z = d$ находится в пределах $\theta_{i-1} \leqslant \theta|_{z=d} \leqslant \theta_i$, а во всей пластинке не превышает значения θ_p $(p \geqslant k + 1)$. После подстановки равенства (20) во второе условие (6) возникает задача для уравнения (5) в Π_d с условиями

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial z}\right|_{z=0} = -q, \quad \left.\left(\frac{\partial\theta}{\partial z} + \alpha\theta + \alpha\lambda_i\left(T_{i-1} - T_c - \frac{d_i}{\lambda_i}\right)\right)\right|_{z=d} = 0, \tag{21}$$

$$\theta|_{\tau=\tau_{p-1}} = \theta_{p-1}^*(z). \tag{22}$$

Представление фиктивного температурного поля выбираем в виде

$$\theta = \frac{q - \alpha s_i(\tau)}{2d}(d - z)^2 + s_i(\tau)e^{-\alpha z} - A_i, \tag{23}$$

где $s_i(\tau) = e^{\alpha d}(\varphi(\tau) + A_i)$; $A_i = \lambda_i\left(T_{i-1} - T_c - \frac{d_i}{\lambda_i}\right)$; $\varphi(\tau)$ — неизвестная фиктивная температура при $z = d$.

Последовательно находим

$$h = k_p + c_p\theta, \quad F = M_p + \frac{c_p\theta^2}{2}, \quad V = \int\limits_0^h \left(M_p + \frac{c_p\theta^2}{2}\right)dz, \quad \frac{\partial V}{\partial\varphi} = B_1\varphi + B_2,$$

где

$$k_p = \sum_{l=1}^{p-1}(c_l - c_{l+1})\theta_l; \quad M_p = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{p-1}(c_l - c_{l+1})\theta_l^2;$$

$$B_1 = \frac{c_p e^{2\alpha d}}{\alpha d}\left[\frac{d}{2}(1 - e^{-2\alpha d}) + \frac{\alpha^3 d^4}{20} - \alpha d^2 + 2d - \frac{2}{\alpha}(1 - e^{-\alpha d})\right];$$

$$B_2 = A_i B_1 + \frac{a_p e^{\alpha d}}{2}\left[\frac{A_l \alpha d^2}{3} - \frac{q\alpha d^3}{10} + \frac{2A_l}{\alpha}(e^{-\alpha d} - 1) + \right.$$

$$\left. + \frac{q}{\alpha d}\left(d^2 - \frac{2d}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2}(1 - e^{-\alpha d})\right)\right].$$

Так как $h = -\operatorname{div} H = -\frac{\partial H}{\partial z}$, то $H = \int\limits_z^0 h\,dz + \gamma(\tau)$, что после дифференцирования по τ дает $\dot{H} = \int\limits_z^0 \dot{h} dz + \dot{\gamma}(\tau)$. Из уравнения $\dot{H} = -\frac{\partial\theta}{\partial z}$ и граничного условия $\left.\frac{\partial\theta}{\partial z}\right|_{z=0} = -q$ получаем $\dot{H}|_{z=0} = q = \dot{\gamma}(\tau)$. Следовательно, $H = \int\limits_z^0 h dz + q\tau$. Вычисляя последний интеграл с учетом равенства (23), получаем сначала

τ, с	z, м					
	0,0	0,0006	0,0012	0,0024	0,0036	0,004
0,01	256,6	107,6	100,0	100,0	100,0	100,0
0,05	450,3	248,6	132,0	100,0	100,0	100,0
0,09	569,9	357,4	208,4	100,0	100,0	100,0
0,13	664,8	446,9	281,9	110,3	100,0	100,0
0,187	735,8	497,2	325,5	126,9	100,0	100,0
0,227	760,0	514,4	340,6	133,9	100,0	100,0
0,267	785,2	532,4	356,6	141,8	100,0	100,0
0,307	811,6	551,2	373,4	150,7	100,0	100,0
0,347	838,9	570,7	390,9	160,6	100,0	100,0
0,387	867,2	591,0	409,4	171,4	100,0	100,0
0,487	943,2	645,6	459,4	203,2	101,9	100,0
0,809	1094,2	786,6	565,5	294,0	162,6	149,4
1,809	1309,6	993,6	737,1	440,3	287,4	262,7
2,809	1393,3	1075,1	817,5	497,2	335,9	306,7
3,809	1425,8	1107,7	848,8	519,3	354,8	323,8
4,809	1438,5	1120,4	860,9	527,9	362,0	330,4
5,059	1440,2	1122,1	862,5	529,0	363,1	331,3
5,309	1441,5	1123,4	863,8	529,9	363,8	332,0

$$H = -k_p z + c_p\left[\frac{q - \alpha s_i(\tau)}{6d}\left((d-z)^3 - d^3\right) + \frac{s_i(\tau)}{\alpha}\left(e^{-\alpha z} - 1\right) + A_i z\right] + q\tau,$$

а затем [1] $\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}} = B_3\dot{\varphi} + B_4$, где

$$B_3 = \frac{e^{2\alpha d} c_p^2}{\alpha^3}\left[2\alpha d - \frac{7}{2} + 2e^{-\alpha d} - \frac{1}{2}e^{-2\alpha d} + \frac{1}{56}(\alpha d)^5 - \frac{1}{4}(\alpha d)^3 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3}(\alpha d)^2 e^{-\alpha d} + \frac{2}{\alpha d}\left(1 - e^{-\alpha d}\right)\right];$$

$$B_4 = \frac{e^{\alpha d} c_p q}{\alpha^2}\left(1 - e^{-\alpha d} - \alpha d + \left(\frac{\alpha d}{2}\right)^3\right),$$

и обобщенную тепловую силу $Q = B_5\varphi$, где

$$B_5 = -\frac{c_p e^{-\alpha d}}{\alpha}\left(e^{-\alpha d} - 1 + \frac{\alpha^2 d^2}{6}\right).$$

Таким образом, уравнение Лагранжа примет вид $B_3\dot{\varphi} + (B_1 - B_5)\varphi + B_2 + B_4 = 0$, а его общее решение —

$$\varphi(\tau) = Ae^{\frac{B_5 - B_1}{B_3}\tau} - \frac{B_2 + B_4}{B_1 - B_5}. \tag{24}$$

Здесь константа A определяется из условия

$$\varphi|_{\tau=\tau_{i-1,p-1}} = \varphi_{i-1,p-1}, \tag{25}$$

где $\tau_{i-1,p-1}$ — момент времени, при котором либо на верхней, либо на нижней поверхности пластинки фиктивная температура переходит из одного промежутка разбиения (8), (9) в другой; $\varphi_{i-1,p-1}$ — фиктивная температура в точке $z = d$ в этот момент времени. Формулой (23), где $\varphi(\tau)$ определяется из соотношений (24), (25), следует пользоваться до того момента времени, при котором $\varphi\ (\tau) \leqslant \theta_i$ и $\theta|_{z=0} \leqslant \theta_p$. Если при $\tau = \tau_{i,p-1}$ либо $\tau = \tau_{i-1,p}$ становится соответственно $\varphi > \theta_i$ либо $\theta\,|_{z=0} > \theta_p$, то A в (24) определяется из нового начального условия: $\varphi\,|_{\tau=\tau_{i,p-1}} = \varphi_{i,p-1}$ либо $\varphi\,|_{\tau=\tau_{i-1,p}} = \varphi_{i-1,p}$. Время $\tau_{i,p-1}$ определяется из формулы (24) при замене φ на θ_i, а $\tau_{i-1,p}$ — из формулы (23) при $z = 0$ и замене θ на θ_p.

На ЭВМ произведен расчет температурного поля пластинки, изготовленной из углеродистой стали 20, в различные моменты времени (таблица). При этом на первом и втором этапах в формулах (8) и (9) выбирали соответственно $i = 1, 2$ и $i = 1, 2, 3$, причем $c_1 = 32{,}827\ \frac{\text{ч}}{\text{м}^2}$, $c_2 = 62{,}294\ \frac{\text{ч}}{\text{м}^2}$, $c_3 = 47{,}619\ \frac{\text{ч}}{\text{м}^2}$, $\lambda_1 = 36{,}85\ \frac{\text{ккал}}{\text{м}\cdot\text{ч}\cdot{}^\circ\text{C}}$, $\lambda_2 = 27{,}2142\ \frac{\text{ккал}}{\text{м}\cdot\text{ч}\cdot{}^\circ\text{C}}$, $\lambda_3 = 26{,}1\ \frac{\text{ккал}}{\text{м}\cdot\text{ч}\cdot{}^\circ\text{C}}$, $\alpha = 282{,}2\ \frac{1}{\text{м}}$, $\theta_1 = 22\,110\ \frac{\text{ккал}}{\text{м}\cdot\text{ч}}$, $\theta_2 = 30\,000\ \frac{\text{ккал}}{\text{м}\cdot\text{ч}}$, $q = 15\cdot 10^6\ \frac{\text{ккал}}{\text{м}^2\cdot\text{ч}}$, $d = 0{,}004$ м. Начальная температура пластинки и температура внешней среды приняты равными 100 °С.

1. *Био М.* Вариационные принципы в теории теплообмена.— М. : Энергия, 1975.— 209 с.

Львовский университет

Поступила в редколлегию 19.11.79

УДК 539.377

Л. П. Беседина

ОПТИМАЛЬНЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ ЛОКАЛЬНОГО ПОДОГРЕВА КРУГОВОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ ТОЧЕЧНОЙ СВАРКЕ

Рассмотрим тонкую круговую пластинку радиуса R, нагреваемую в промежутке времени $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_\text{н}$ неподвижным постоянным по толщине сварным источником тепла мощности q. В условиях конвективного теплообмена с внешней средой усредненное по толщине температурное поле определяется по формулам [4, 5]

$$T_0(\rho, \tau) = \frac{q}{4\pi\lambda h} K_0(\rho, \omega) \quad \text{для} \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_\text{н},$$
$$T_0(\rho, \tau) = \frac{q}{4\pi\lambda h}[K_0(\rho, \omega) - K_0(\rho, \omega - \omega_\text{н})] \quad \text{для} \quad \tau_\text{н} \leqslant \tau < \infty, \tag{1}$$

где

$$K_0(\rho, \omega) = \int\limits_0^\omega e^{-\frac{\varkappa R\rho}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)} \frac{d\xi}{\xi};$$

$\omega = \frac{2\varkappa a\tau}{R\rho}$; $\omega_\text{н} = \frac{2\varkappa a\tau_\text{н}}{R\rho}$; $\varkappa = \frac{\alpha_0}{\lambda h}$; ρ, φ — полярная система координат $\left(\rho = \frac{r}{R},\ r^2 = x^2 + y^2\right)$; α_0, a, λ — коэффициенты теплоотдачи, температуропроводности, теплопроводности соответственно; $2h$ — толщина пластинки; $\delta(\rho)$ — дельта-функция Дирака; $S_+(\tau)$ — асимметричная единичная функция. Примем, что материал пластинки упругопластический. Температурную зависимость характеристик материала будем учитывать по следующей приближенной схеме:

$$\sigma_T(T) = \begin{cases} \sigma_T = \text{const} & \text{для } T < T_*, \\ 0 & \text{для } T \geqslant T_*. \end{cases} \tag{2}$$