Здесь

$$|\varphi| \leqslant \pi; \quad f_1 = \frac{\sin \varepsilon_z k}{k} \frac{\sin \varepsilon_\varphi m}{m}.$$

По формуле (15) проведены расчеты температурного поля на боковой поверхности цилиндра ($\rho = \rho_0$) при $B_0 = 07$, $\mathrm{Bi}_1 = 0,1$, $\rho_0 = 0,6283$; $\varepsilon_z = 0,3$; $\varepsilon_\varphi = 0,1$, результаты которых представлены на рис. 1 и 2. На рис. 1 показана зависимость температурного, поля от координаты φ при $Z = 0$; 0,15; 0,25; 0,3 (кривые *1—4*). На рис. 2 приведены графики, описывающие поведение температурного поля при изменении координаты Z при $\varphi = 0$; 0,05; 0,08; 0,1 (кривые *1—4*). Исследование числовых результатов показало, что температурное поле наиболее резко изменяется в окрестностях границы области локального термического воздействия.

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики.— М. : Наука, 1971.— 512 с.
2. *Коляно Ю. М., Грицько Е. Г.* Узкозональный нагрев тел.— ФХОМ, 1977, № 3, с. 149—152.
3. *Коляно Ю. М., Грицько Е. Г.* Температурное поле в массивных телах при смешанных граничных условиях.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 2, с. 132—136.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 22.10.79

УДК 517.944

В. А. Домбровский, М. П. Ленюк

ОБОБЩЕННЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ В СПЛОШНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ТЕЛАХ

Рассмотрим однородный изотропный сплошной шар $D = \{(r, \theta, \varphi), 0 \leqslant r \leqslant R, 0 \leqslant \theta < \pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$, имеющий при $t \leqslant 0$ нулевую температуру, а при $t > 0$ через поверхность шара $r = R$ осуществляется теплообмен по обобщенному закону Ньютона со средой, температура которой является случайной функцией времени.

Если в шаре равномерно распределены тепловые источники, интенсивность которых есть также случайной функцией времени, то задача построения в шаре D стохастического температурного поля в предположении, что время релаксации теплового потока τ_r не зависит от направления, математически формулируется так: найти в области D решение уравнения [6, 8]

$$P_1[T] \equiv b_0^2 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + b_1^2 \frac{\partial T}{\partial t} - a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{\mu,\varphi} T \right) = f_1(t, r, \mu, \varphi) \tag{1}$$

по нулевым начальным условиям

$$T|_{t=0} = 0, \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

краевым условиям

$$\lim_{r \to 0} (\sqrt{r}\, T) = 0, \ P_2[T]|_{r=R} = \left[\frac{\partial}{\partial r} + h_2 \frac{\partial}{\partial t} + h_3 \right] T|_{r=R} = = -h \left(1 + \beta_2 \tau_r \frac{\partial}{\partial t} \right) f_2(t, \mu, \varphi) \equiv g(t, \mu, \varphi) \tag{3}$$

и условиям однозначности по (θ, φ). Здесь $\mu = \cos\theta$; $h_2 = -h\tau_r\beta_1\beta_2$; $h_3 = -\beta h$; $\Delta_{\mu,\varphi} = \frac{\partial}{\partial \mu}\left[\left(1 - \mu^2\right)\frac{\partial}{\partial \mu}\right] + \frac{1}{1 - \mu^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$. Остальные величины, используемые при формулировке задачи, общеизвестные [6, 10].

Следуя работам [3, 11], определим конечные прямой Λ_{nm} и обратный Λ_{nm}^{-1} интегральные обобщенные преобразования Лежандра — Фурье по правилам

$$\Lambda_{nm}[f(\varphi, \mu)] = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} f(\varphi, \mu)\, e^{im\varphi} P_n^m(\mu)\, d\varphi d\mu \equiv f_{nm}, \tag{4}$$

$$\Lambda_{nm}^{-1}[f_{nm}] = \frac{\mathrm{Re}}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \xi_m \frac{e^{-im\varphi} P_n^m(\mu)}{\| P_n^m(\mu)\|^2} f_{nm} \equiv f(\varphi, \mu), \tag{5}$$

где $P_n^m(\mu)$ — присоединенная функция Лежандра первого рода [2],

$$\xi_m = \frac{1}{2}\begin{cases} 1, & \text{если } m = 0, \\ 2, & \text{если } m \geqslant 1; \end{cases} \quad \| P_n^m(\mu)\|^2 = \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} \text{ — квадрат нормы.}$$

При этом справедливо равенство

$$\Lambda_{nm}[\Lambda_{\mu,\varphi} f(\mu, \varphi)] = -n(n+1) f_{nm} = -\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] f_{nm}. \tag{6}$$

Оператор Λ_{nm} и интегральный оператор Лапласа L [5], действующий по временной переменной, позволяют свести задачу (1) — (3) к одномерной задаче построения ограниченного на $[0, R]$ решения уравнения Бесселя для модифицированных функций

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \left(q^2 + \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}{r^2}\right)\right] T_{nm}^* = -a^{-2} f_{1nm}^*(p, r) \tag{7}$$

по краевым условиям

$$\lim_{r\to 0}(\sqrt{r} T_{nm}^*) = 0, \quad \left(\frac{d}{dr} + h_2 p + h_3\right) T_{nm}^* \Big|_{r=R} = g_{nm}^*(p). \tag{8}$$

Детерминированное решение задачи (7), (8), а с применением к нему операторов L^{-1} и Λ_{nm}^{-1} детерминированное решение исходной задачи (1) — (3) построено в работе [10]:

$$T(t, r, \mu, \varphi) = \int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_0^R E(t-\tau, r, \rho; \mu, \eta, \varphi-\alpha) f_1(\tau, \rho, \eta, \alpha) \times$$

$$\times \rho^2 d\rho d\eta d\alpha d\tau + \int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} W(t-\tau, r; \mu, \eta, \varphi-\alpha)\, g(\tau, \eta, \alpha)\, d\eta d\alpha d\tau, \tag{9}$$

где фундаментальная функция E и функция Грина W задачи (1) — (3) имеют вид

$$E = \frac{4e^{-kt}}{\pi R^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \xi_m \sum_{j=1}^{\infty} F_{jn}(t) H_{jnm}(r, \mu, \eta, \varphi)\, I_{n+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\beta_{jn}\rho) S_+(t),$$

$$W = \frac{4a^2}{\pi} e^{-kt} \sum_{n,m=0}^{\infty} \xi_m \sum_{j=1}^{\infty} F_{jn}(t) H_{jnm}(r, \mu, \eta, \varphi)\, I_{n+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\beta_{jn} R),$$

$$H_{jnm}(r, \mu, \eta, \varphi) = \frac{I_{n+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\beta_{jn} r) P_n^m(\mu) P_n^m(\eta)}{[I_{n+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\beta_{jn} R)]^2 \| P_n^m(\mu)\|^2} \cos m\varphi,$$

$$F_{jn}(t) = \frac{h_2 v_{jn} \operatorname{ch} \bar{q}_{jn} t - q_{jn} u_{jn} \operatorname{sh} \bar{q}_{jn} t}{\bar{h}^2 v_{jn}^2 - q_{jn}^2 u_{jn}^2} \beta_{jn}^2, \quad \bar{h}_2 = h_2 b_0^{-2},$$

$$u_{jn} = R(h_3 - h_2 k)^2 + (h_2 k - h_3) + R^{-1}(R^2\beta_{jn}^2 - n(n+1)) + R\bar{h}_2^2 \bar{q}_{jn}^2,$$

$$v_{jn} = 2a^2 b_0^2 \beta_{jn}^2 - \left(\frac{1}{2} - Rh_3 + Rh_2 k\right) q_{jn}^2, \quad k = b_1^2 (2b_0^2)^{-1},$$

$\bar{q}_{jn} = q_{jn}(2b_0^2)^{-1}$, $q_{jn} = q(\beta_{jn}) = \sqrt{b_1^4 - 4a^2 b_0^2 \beta_{jn}^2}$, $I_{\alpha,\nu}(k) = x^{-\nu} I_\alpha(x)$, $I_\alpha(x)$ —

функция Бесселя первого рода порядка α [1], β_{jn} — различные корни трансцендентного обобщенного уравнения Бесселя первого рода

$$\Delta_{n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\beta) \equiv \left(\frac{n}{R} + h_2 p_{\pm}(\beta) + h_3\right) I_{n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(R\beta) - R\beta^2 I_{n+\frac{3}{2},\frac{3}{2}}(\beta R) = 0,$$

$$p_{\pm}(\beta) = -k \pm \bar{q}(\beta), \quad \bar{q}(\beta) = q(\beta)(2b_0^2)^{-1}.$$

Отметим, что формула (9) определяет в рассматриваемой области единственное ограниченное решение задачи (1) — (3), если функции f_1 и g принадлежат классу $M_t = \{\psi(t), \left(b_0^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + b_1^2 \frac{\partial}{\partial t}\right)\psi \in C[0, t_1]\}$ и удовлетворяют, возможно, некоторым условиям, а именно: $\psi(0) = 0$, $b_0 \frac{\partial \psi(0)}{\partial t} + b_1 \psi(0) = 0$. Последнее не существенно. По другим аргументам функции f_1 и g дважды непрерывно дифференцируемые [4].

Предположим, что функции f_1 и f_2 можно представить в виде произведений $f_1 = f_{11}(r, \mu, \varphi) T_1(t)$ и $f_2 = f_{21}(\mu, \varphi) T_2(t)$ или суммы таких произведений, где f_{k1} — детерминированные функции, а $T_k(t)$ — стационарные в широком смысле случайные функции времени [9], причем реализации функции $T_2(t)$ выходят из нуля, т. е. $T_2(0) = 0$ с вероятностью единица.

Если ввести в рассмотрение функции

$$A_1(t, r, \mu, \varphi) = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} \int_0^{R} E(t, r, \rho; \mu, \eta, \varphi - \alpha) f_{11}(\rho, \eta, \alpha) \rho^2 d\rho d\eta d\alpha,$$

$$A_2(t, r, \mu, \varphi) = -h\left(1 + \beta_2 \tau_r \frac{\partial}{\partial t}\right) \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} W(t, r; \mu, \eta, \varphi - \alpha) f_{21}(\eta, \alpha) d\eta d\alpha,$$

то формула (9) приобретает вид

$$T(t, r, \mu, \varphi) = \sum_{j=1}^{2} \int_0^t A_j(t-\tau, r, \mu, \varphi) T_j(\tau) d\tau. \tag{10}$$

В силу линейности задачи (1) — (3) можно, не нарушая общности, считать, что математические ожидания $M[T_j(t)] = 0$, $j = 1, 2$. Тогда согласно формуле (10) имеем

$$M[T] = \sum_{j=1}^{2} A_j(t-\tau, r, \mu, \varphi) M[T_j] d\tau = 0.$$

Корреляционная функция температурного поля определяется по формуле

$$K_T(t_1, t_2; r, \mu, \varphi) = \sum_{m, j=1}^{2} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} A_m(t_1 - \tau_1, r, \mu, \varphi) A_j(t_2 - \tau_2, r, \mu, \varphi) \times$$
$$\times K_{mj}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2, \quad K_{mj} \equiv K_{T_m T_j}(\tau_1, \tau_2). \tag{11}$$

Если температурные поля, порожденные случайными процессами $T_k(t)$, независимые, то $K_{mj} = 0$ для $m \neq j = 1, 2$, т. е. $K_{12} = K_{21} = 0$. Наиболее важными с практической точки зрения есть случайные процессы, корреляционные функции которых имеют вид [7]

$$\text{а) } K_j = \delta(t_2 - t_1), \quad \text{б) } K_j = e^{-\chi|t_2 - t_1|} \quad (\chi = \text{const} > 0).$$

Образы по Лапласу этих корреляционных функций соответственно:

$$\text{а) } K_j^{**} = \frac{1}{p_1 + p_2}, \quad \text{б) } K_j^{**} = \left(1 + \frac{2\chi}{p_1 + p_2}\right) \frac{1}{p_1 + \chi} \frac{1}{p_2 + \chi}.$$

Так как любое из слагаемых формулы (11) в образах Лапласа имеет структуру

$$\text{а) } A_m^*(p_1, r, \mu, \varphi) A_j^*(p_2, r, \mu, \varphi) \frac{1}{p_1 + p_2},$$

$$\text{б) } \left(1 + \frac{2\chi}{p_1 + p_2}\right) \frac{A_m^*(p_1, r, \mu, \varphi)}{p_1 + \chi} \frac{A_j^*(p_2, r, \mu, \varphi)}{p_2 + \chi},$$

то оно выражается так:

$$\text{а) } \int_0^t A_m(t_1 - \tau, r, \mu, \varphi) A_j(t_2 - \tau, r, \mu, \varphi) d\tau, \quad t = \min(t_1, t_2),$$

$$\text{б) } B_m(t_1, r, \mu, \varphi) B_j(t_2, r, \mu, \varphi) + 2\chi \int_0^t B_m(t_1 - \tau, r, \mu, \varphi) B_j(t_2 - \tau, r, \mu, \varphi) d\tau.$$

$$B(t, r, \mu, \varphi) = \int_0^t A(t - x, r, \mu, \varphi) e^{-\chi x} dx.$$

Полагая в полученных формулах $t_1 = t_2 = t$, получаем мощность D_T температурных полей в сплошном однородном изотропном шаре. При $\tau_r \equiv b_0 \to 0$ найдем основные характеристики стохастических квазистатических (обычных, классических) температурных полей в рассматриваемой области. При этом параметры β_1, β_2 и h позволяют выделить из общих формул решение задачи при задании на границе шара краевых условий первого, второго или третьего рода.

1. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций.— М. : Изд-во иностр. лит., 1949.— 798 с.
2. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций.— М. : Изд-во иностр. лит., 1952.— 476 с.
3. *Земанян А. Г.* Интегральные преобразования обобщенных функций.— М. : Наука, 1974.— 398 с.
4. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики.— М. : Высш. школа, 1970.— 710 с.
5. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного.— М. : Наука, 1973.— 736 с.
6. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности.—М. : Высш. школа, 1967.— 600 с.
7. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения.— М. : Физматгиз, 1963.— 251 с.
8. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика.— Киев : Наук. думка, 1976.— 310 с.
9. *Пугачев В. С.* Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления.— М. : Физматгиз, 1965.— 884 с.
10. *Семенюк В. В., Ленюк М. П.* Загальні температурні поля в суцільних однорідних сферичних тілах.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1978, № 3, с. 266—270.
11. *Снеддон И.* Преобразования Фурье.— М. : Изд-во иностр. лит., 1955.— 667 с.

Тернопольский финансово-экономический институт
Черновицкий университет

Поступила в редколлегию 10.05.79

УДК 517.958

В. Г. Костенко, П. П. Доманский, Н. И. Бугрий

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ С КОНВЕКТИВНЫМ ТЕПЛООБМЕНОМ И ИНТЕНСИВНЫМ ПОВЕРХНОСТНЫМ НАГРЕВОМ

Рассмотрим бесконечную пластинку толщины d, одна из поверхностей которой находится под воздействием теплового потока интенсивности q, а на другой происходит конвективный теплообмен с внешней средой. Начальная температура пластинки равна T_0. Требуется найти распределение темпера-