включения увеличивает, а мягкого уменьшает коэффициенты интенсивности, причем с приближением к границе спая в первом случае они растут, а во втором — убывают.

Для однородного материала ($\mu_1 = \mu_2$, $M = 0$) уравнение (10) допускает точное решение. Используя формулу обращения интеграла типа Коши [1], получаем

$$g'(\sigma) = \frac{Qr}{\mu} \frac{\sigma(\sigma - 1)\cos\omega + \sigma^3 - 1}{\sigma^2 \sqrt{(\sigma - e^{i\omega})(\sigma - e^{-i\omega})}}$$

и по формуле (9) находим выражение для коэффициента интенсивности напряжений

$$k_3 = Q\sqrt{\pi r \sin\omega}\cos\frac{\omega}{2}.$$

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.— М. : Физматгиз, 1958.— 544 с.
2. *Каландия А. Л.* Математические методы двумерной упругости.— М. : Наука, 1973.— 204 с.
3. *Кит Г. С.* Об аналогии между продольным сдвигом и стационарной теплопроводностью тел с включениями и трещинами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 4, с. 334—337.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М. : Наука, 1966.— 708 с.
5. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения.— М. : Наука, 1974.— 340 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 21.03.79

УДК 536.12÷539.376

Ю. М. Коляно, Е. Г. Грицько

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ ИЗМЕНЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛООТДАЧИ

Пусть тело в цилиндрической системе координат занимает пространствс $0 \leqslant r \leqslant r_0$, $0 \leqslant z \leqslant z_0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$ и его поверхности $z = 0$, $z = z_0$, $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi_0$ теплоизолированы. Через поверхность $r = r_0$ осуществляется конвективный теплообмен с внешней средой, причем коэффициент теплоотдачи с области Γ_0 поверхности $r = r_0$ и температура внешней среды $t_c(z, \varphi)$, омывающей эту область, есть функции координат z, φ. Остальная часть поверхности $r = r_0$ омывается внешней средой нулевой температуры при постоянном коэффициенте теплоотдачи с этой поверхности.

Обозначим относительные коэффициенты теплоотдачи соответственно $h_0(z, \varphi)$ с области Γ_0 и h_1 за пределами Γ_0. Краевая задача для определения температурного поля в рассматриваемом теле имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial t}{\partial z}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial t}{\partial z}\right|_{z=z_0} = \left.\frac{\partial t}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = \left.\frac{\partial t}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial t}{\partial r} = -h_1 t - \{[h_0(z, \varphi) - h_1]\, t - h_0(z, \varphi)\, t_c(z, \varphi)\, \chi_0(z, \varphi)\} \quad \text{при } r = r_0, \tag{3}$$

где

$$\chi_0(z, \varphi) = \begin{cases} 1 & \text{при } z, \varphi \in \Gamma_0, \\ 0 & \text{при } z, \varphi \bar{\in} \Gamma_0. \end{cases}$$

Применив к уравнениям (1), (3) конечное косинус-преобразование Фурье по координатам z, φ с учетом условий (2), получим

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\bar{t}}{dr}\right)-\left(\frac{\zeta^2}{r^2}+\xi^2\right)\bar{t}=0, \tag{4}$$

$$\left.\frac{d\bar{t}}{dr}\right|_{r=r_0}+h_1\bar{t}\,|_{r=r_0}=f_0(\xi,\ \zeta)-\iint\limits_{\Gamma_0}[h_0(z,\ \varphi)-h_1]\,t\,|_{r=r_0}\cos\zeta\varphi\cos\xi z dz d\varphi, \tag{5}$$

где

$$\bar{t}=\int\limits_0^{z_0}\cos\xi z dz\int\limits_0^{\varphi_0}t\cos\zeta\varphi d\varphi;\quad \zeta=m\pi/\varphi_0;\quad \xi=k\pi/z_0;$$

$$f_0(\xi,\ \zeta)=\iint\limits_{\Gamma_0}h_0(z,\ \varphi)\,t_c(z,\ \varphi)\cos\zeta\varphi\cos\xi z dz d\varphi$$

Из выражений (4), (5) видно, что решение задачи (1) — (3) сводится к нахождению температурного поля на области Γ_0. Разобьем Γ_0 на области Γ_{0n} ($n=0,1,\ldots,N$) так, чтобы объединение этих областей совпадало с Γ_0 и выполнялись следующие соотношения:

$$\Gamma_{0i}\cap\Gamma_{0j}=\begin{cases}\varnothing & \text{при } i\neq j,\\ \Gamma_{0i} & \text{при } i=j.\end{cases}$$

Введем функции $\chi_{0i}(z,\varphi)$ в виде [1]

$$\chi_{0i}(z,\ \varphi)=\begin{cases}1 & \text{при } z,\ \varphi\in\Gamma_{0i},\\ 0 & \text{при } z,\ \varphi\bar{\in}\Gamma_{0i}.\end{cases} \tag{6}$$

Построенная система функций (6) ортогональна на области Γ_0, т. е.

$$\iint\limits_{\Gamma_0}\chi_{0i}(z,\ \varphi)\,\chi_{0j}(z,\ \varphi)\,dz d\varphi=\delta_{ij}P_i,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера; P_i — площадь Γ_{0i}, деленная на r_0. Это утверждение следует из условия непересекаемости областей Γ_{0i} и Γ_{0j} при $i\neq j$.

Представим аналогично работам [2, 3] t в области Γ_0 в виде

$$t^*=\sum_{i=0}^{N}d_i\chi_{0i}(z,\ \varphi). \tag{7}$$

Здесь

$$d_i=P_i^{-1}\iint\limits_{\Gamma_0}t^*|_{r=r_0}\chi_{0i}(z,\ \varphi)\,dz d\varphi. \tag{8}$$

Заменив t в выражении (5) на t^* в виде (7), получим

$$\frac{d\bar{t}^*}{dz}+h_1\bar{t}^*=f_0(\xi,\ \zeta)-\sum_{i=0}^{N}d_i\Psi_i(\xi,\ \zeta)\qquad \text{при } r=r_0, \tag{9}$$

где

$$\Psi_i(\xi,\ \zeta)=\iint\limits_{\Gamma_0}[h_0(z,\ \varphi)-h_1]\cos\zeta\varphi\cos\xi z dz d\varphi. \tag{10}$$

Решив краевую задачу (4), (9) и перейдя в найденном решении к оригиналу, найдем

$$t^*=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_k\varepsilon_m\left[f_0(\xi,\ \zeta)-\sum_{i=0}^{N}d_i\Psi_i(\xi,\ \zeta)\right]\Phi(r,\ \xi,\ \zeta)\cos\zeta\varphi\cos\xi z. \tag{11}$$

Здесь

$$\Phi(r,\ \xi,\ \zeta)=\frac{r^{\zeta}}{\zeta r_0^{\zeta-1}+h_1r_0^{\zeta}}\delta_{0k}+\frac{2I_{\zeta}(r\xi)}{I_{\zeta+1}(r_0\xi)+I_{\zeta-1}(r_0\xi)+2h_1I_{\zeta}(r_0\xi)}[1-\delta_{0k}];$$

$\varepsilon_k=1/z_0$, $\varepsilon_m=1/\varphi_0$ при $m=k=0$; $\varepsilon_k=2/z_0$, $\varepsilon_m=2/\varphi_0$ при $k,m=1,2,\ldots$

Подставляя значение t^* в выражение (8), приходим к системе

$$d_i = P_i^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_k \varepsilon_m \left[f_0(\xi, \zeta) - \sum_{l=0}^{N} d_l \Psi_l(\xi, \zeta) \right] \Phi(r_0, \xi, \zeta) \overline{\chi}_{0i}, \tag{12}$$

где

$$\overline{\chi}_{0l} = \iint_{\Gamma_0} \cos \xi z \cos \zeta \varphi dz d\varphi. \tag{13}$$

Решив систему (12) и подставив значения d_l в уравнение (11), получим формулу для определения температурного поля.

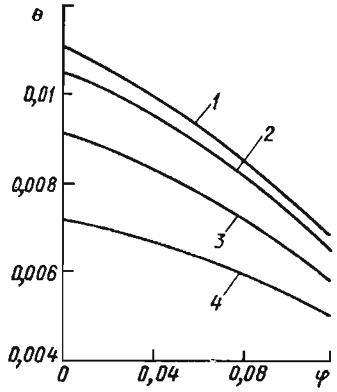

Рис. 1

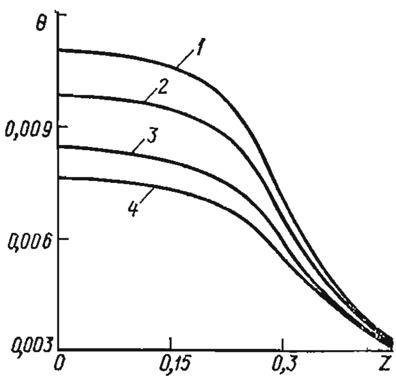

Рис. 2

Пусть $\Gamma_0 \subset \Gamma_{00}$. Тогда с учетом формул (7), (8) и (12) выражение для определения температурного поля (11) примет вид

$$t^* = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_k \varepsilon_m \cos \zeta \varphi \cos \xi z \Phi(r, \xi, \zeta) \Bigg[f_0(\xi, \zeta) -$$

$$- \Psi_0(\xi, \zeta) \left(P_0^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_k \varepsilon_m f_0(\xi, \zeta) \Phi(r_0, \xi, \varepsilon) \overline{\chi}_{00} \right) \times$$

$$\times \left(1 + P_0^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_k \varepsilon_m \Psi(\xi, \zeta) \Phi(r_0, \xi, \zeta) \overline{\chi}_{00} \right)^{-1} \Bigg]. \tag{14}$$

Заменив в выражениях (11), (12) и (14) t^*, r, z, r_0, z_0, $t_c(z, \varphi)$, $h_0(z, \varphi)$, h_1, d_i, P_i соответственно на $\theta^* = t^*/t_c(0, 0)$,

$$\rho = r\pi/z_0, \; Z = z\pi/z_0, \; \pi, \; \theta_c(Z, \varphi) = t_c(Z, \varphi)/t_c(0, 0),$$

$$\mathrm{Bi}_0(Z, \varphi) = h_0(Z, \varphi) z_0/\pi, \; \mathrm{Bi}_1 = h_1 z_0/\pi, \; D_i = d_i/t_c(0, 0), \; P_i^* = P_i \pi/z_0,$$

представим решение задачи в безразмерном виде.

Рассмотрим конечный цилиндр $0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0$, $0 \leqslant Z \leqslant \pi$, у которого поверхности $Z = 0$ и $Z = \pi$ теплоизолированы. Область Γ_0 описывается соотношениями $|\varphi| \leqslant \varepsilon_\varphi$, $|Z| \leqslant \varepsilon_z$. Критерий Био и температуры внешней среды в области Γ_0 постоянны и равны $\mathrm{Bi}_0(Z, \varphi) \equiv B_0$, $\theta_c(Z, \varphi) \equiv 1$. Исходя из симметрии граничных условий можно заключить, что

$$\left. \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\pi} = \left. \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = 0.$$

Это позволяет использовать в данной задаче решения (11) и (14).

Использовав для определения температурного поля в цилиндре формулу (14), получим

$$t^* = \frac{B_0 \sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum\limits_{m=0}^{\infty} \varepsilon_k \varepsilon_m \Phi(\rho, k, m) f_1 \cos kZ \cos m\varphi}{1 + \frac{B_0 - \mathrm{Bi}_1}{\varepsilon_z \varepsilon_\varphi} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum\limits_{m=0}^{\infty} \varepsilon_k \varepsilon_m \Phi(\rho_0, k, m) f_1^2}. \tag{15}$$

Здесь

$$|\varphi| \leqslant \pi; \quad f_1 = \frac{\sin \varepsilon_z k}{k} \frac{\sin \varepsilon_\varphi m}{m}.$$

По формуле (15) проведены расчеты температурного поля на боковой поверхности цилиндра ($\rho = \rho_0$) при $B_0 = 07$, $\mathrm{Bi}_1 = 0,1$, $\rho_0 = 0,6283$; $\varepsilon_z = 0,3$; $\varepsilon_\varphi = 0,1$, результаты которых представлены на рис. 1 и 2. На рис. 1 показана зависимость температурного, поля от координаты φ при $Z = 0$; 0,15; 0,25; 0,3 (кривые *1—4*). На рис. 2 приведены графики, описывающие поведение температурного поля при изменении координаты Z при $\varphi = 0$; 0,05; 0,08; 0,1 (кривые *1—4*). Исследование числовых результатов показало, что температурное поле наиболее резко изменяется в окрестностях границы области локального термического воздействия.

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики.— М. : Наука, 1971.— 512 с.
2. *Коляно Ю. М., Грицько Е. Г.* Узкозональный нагрев тел.— ФХОМ, 1977, № 3, с. 149—152.
3. *Коляно Ю. М., Грицько Е. Г.* Температурное поле в массивных телах при смешанных граничных условиях.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 2, с. 132—136.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 22.10.79

УДК 517.944

В. А. Домбровский, М. П. Ленюк

ОБОБЩЕННЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ В СПЛОШНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ТЕЛАХ

Рассмотрим однородный изотропный сплошной шар $D = \{(r, \theta, \varphi), 0 \leqslant r \leqslant R, 0 \leqslant \theta < \pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$, имеющий при $t \leqslant 0$ нулевую температуру, а при $t > 0$ через поверхность шара $r = R$ осуществляется теплообмен по обобщенному закону Ньютона со средой, температура которой является случайной функцией времени.

Если в шаре равномерно распределены тепловые источники, интенсивность которых есть также случайной функцией времени, то задача построения в шаре D стохастического температурного поля в предположении, что время релаксации теплового потока τ_r не зависит от направления, математически формулируется так: найти в области D решение уравнения [6, 8]

$$P_1[T] \equiv b_0^2 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + b_1^2 \frac{\partial T}{\partial t} - a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{\mu,\varphi} T \right) = f_1(t, r, \mu, \varphi) \tag{1}$$

по нулевым начальным условиям

$$T|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

краевым условиям

$$\lim_{r \to 0} (\sqrt{r} T) = 0, \quad P_2[T]|_{r=R} = \left[\frac{\partial}{\partial r} + h_2 \frac{\partial}{\partial t} + h_3 \right] T|_{r=R} = $$
$$= -h \left(1 + \beta_2 \tau_r \frac{\partial}{\partial t} \right) f_2(t, \mu, \varphi) \equiv g(t, \mu, \varphi) \tag{3}$$

и условиям однозначности по (θ, φ). Здесь $\mu = \cos\theta$; $h_2 = -h\tau_r\beta_1\beta_2$; $h_3 = -\beta h$; $\Delta_{\mu,\varphi} = \frac{\partial}{\partial\mu}\left[\left(1 - \mu^2\right)\frac{\partial}{\partial\mu}\right] + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$. Остальные величины, используемые при формулировке задачи, общеизвестные [6, 10].