

$$-2[(m_{113}n_{123} + m_{123}n_{113})\delta_{r1}\delta_{q2} + (m_{112}n_{123} + m_{123}n_{112})\delta_{r1}\delta_{q3} + (m_{112}n_{113} + m_{113}n_{112})\delta_{r2}\delta_{q3}] \rangle. \quad (18)$$

Здесь L_{jix} определяются равенством (16). Функции $\alpha_j(\xi)$, удовлетворяющие уравнениям (17), должны обращаться в нуль на контуре области S , так как перемещения вне трещины являются непрерывными функциями.

Таким образом, задача термоупругости для бесконечного тела с трещиной, размещенной по произвольной поверхности S , сведена к системе трех интегро-дифференциальных уравнений. Для многих задач полученные интегральные уравнения можно решать аналитически методом малого параметра. В частности, когда трещина размещена по поверхности сферы, за малый параметр можно выбрать отношение диаметра контура трещины к диаметру сферы.

1. Кит Г. С., Хай М. В. Интегральные уравнения пространственных задач теплопроводности для тел с трещинами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 8, с. 704—707.
2. Кит Г. С., Хай М. В. Интегральные уравнения пространственных задач термоупругости для тел с трещинами.— Докл. АН УССР. Сер. А., 1975, № 12, с. 1108—1112.
3. Партон В. З., Перлин П. И. Интегральные уравнения теории упругости.— М.: Наука, 1977.— 312 с.
4. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / В. Д. Купрадзе, Т. Г. Гегелиа, М. О. Башелейшвили, Г. В. Бурчуладзе.— М.: Наука, 1976.— 663 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 16.02.79

УДК 539.3

И. М. Зашкильняк

ВЛИЯНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ НА КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ ТЕЛА С ТРЕЩИНАМИ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Рассмотрим бесконечное тело с инородным цилиндрическим включением радиуса R , ослабленное произвольно расположенными криволинейными трещинами. Тело находится в состоянии антиплоской деформации, обусловленной некоторыми сдвигающими усилиями. Выберем декартову систему координат xOy с началом в центре включения и введем обозначения: S_1 — область $|z| < R$, S_2 — область $|z| > R$, $S = S_1 \cup S_2$, L_j — совокупность трещин в S_j ($j = 1, 2$). В дальнейшем все величины с индексом «1» будут относиться к включению, а с индексом «2» — к матрице.

Считаем, что в области S без трещин известно напряженное состояние τ_{0iz} ($i = x, y$), на линии спая Γ включения и матрицы имеют место условия идеального механического контакта, трещины свободны от внешних нагрузок. При сформулированных условиях найдем напряженное состояние τ_{iz} ($i = x, y$), обусловленное наличием трещин. Решение задачи продольного сдвига сводится к нахождению аналитической функции $F(z)$ ($z = x + iy$). Компоненты перемещений и напряжений выражаются при этом через функцию $F(z)$ следующим образом:

$$w(x, y) = \operatorname{Re} F(z), \quad \tau_n = \mu \operatorname{Re} [F'(z) e^{i\alpha}], \quad (1)$$

где α — угол между нормалью n и осью Ox ; μ — модуль сдвига.

Для определения τ_{iz} имеем граничные условия

$$w_1(\sigma) = w_2(\sigma) = f(\sigma), \quad \tau_{nz}^{(1)}(\sigma) = \tau_{nz}^{(2)}(\sigma), \quad \sigma = \operatorname{Re}^{\theta} \in \Gamma, \quad (2)$$

$$\tau_{nz}(t) = 0, \quad t \in L = L_1 \cup L_2. \quad (3)$$

Комплексные потенциалы $F_j(z)$ для областей S_j выберем так:

$$F_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_j} \frac{g_j(\tau) d\tau}{\tau - z} + F_j^*(z), \quad j = 1, 2, \quad (4)$$

где $g(\tau) = w^+(\tau) - w^-(\tau)$; $F_j^*(z)$ — голоморфная функция в S_j . Для определения этих функций решим первую основную задачу логарифмического потенциала для круга и плоскости с круговым отверстием [4], используя первое условие (2):

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\sigma) d\sigma}{\sigma - z} - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} g_1(t) \left[\frac{dt}{t - z} + \frac{zd\bar{t}}{R^2 - z\bar{t}} \right], \\ F_2(z) &= -\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\sigma) d\sigma}{\sigma - z} - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} g_2(t) \left[\frac{dt}{t - z} + \frac{d\bar{t}}{t(R^2 - z\bar{t})} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

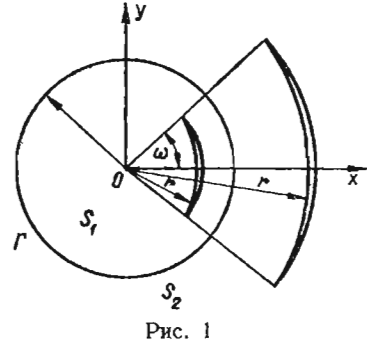


Рис. 1

Удовлетворяя второму условию (2) и используя при этом формулы (1), для функции $f(\sigma)$ получаем сингулярное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(\sigma) d\sigma}{\sigma - \tau} &= -\frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \frac{1}{\pi i} \sum_{j=1}^2 \int_{L_j} g_j(t) \tau (-1)^j \times \\ &\times \nu_j \left[\frac{R^2 d\bar{t}}{(R^2 - \tau\bar{t})^2} - \frac{dt}{(t - \tau)^2} \right], \quad \tau \in \Gamma, \end{aligned} \quad (6)$$

решая которое находим $f(\sigma)$, а затем из формул (5) и комплексные потенциалы $F_j(z)$:

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} g_1(t) \left[\frac{dt}{t - z} + \frac{Mzd\bar{t}}{R^2 - z\bar{t}} \right] + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} g_2(t) \times \\ &\times \left\{ \left[\frac{2M - 1}{4t} + \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{1}{t - z} \right] dt - \frac{d\bar{t}}{4\bar{t}} \right\}, \\ F_2(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} g_2(t) \left[\frac{dt}{t - z} - \frac{Md\bar{t}}{t(R^2 - z\bar{t})} \right] + \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{g_1(t) dt}{t - z}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $M = (\mu_1 - \mu_2)/(\mu_1 + \mu_2)$.

По формулам (1) найдем компоненты напряжений на линии расположения трещин. Требуя, чтобы берега трещин были свободны от напряжений, для определения $g_j(t)$ получаем систему сингулярных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} g_j'(t) \operatorname{Re} \left\{ \left[\frac{1}{t - \tau} + \frac{(-1)^j MR^2}{\tau(R^2 - t\bar{\tau})} \right] i e^{i\alpha} \right\} dt + \\ + \frac{\mu_k}{(\mu_1 + \mu_2)\pi} \int_{L_k} g_k'(t) \operatorname{Re} \frac{i e^{i\alpha}}{t - \tau} dt = \frac{\tau_{0n2}^j}{\mu_j} \quad (j = 1, 2), \end{aligned} \quad (8)$$

где $k = j - (-1)^j$. Располагая выражением $g_j'(t)$, легко найти коэффициенты интенсивности напряжений [3, 5]

$$k_3 = \mu i \lim_{\tau \rightarrow z_s} \sqrt{2\pi(\tau - z_s)} e^{-i\varphi} g'(\tau), \quad (9)$$

где z_3 — координата вершины трещины; φ — угол между осью Ox и касательной к линии L_j в точке z_3 , направленной от трещины.

Пример. Рассмотрим случай, когда включение или матрица ослаблены дугообразной трещиной радиуса r с центральным углом 2ω (рис. 1). Тогда уравнение (8) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} g_j(\tau) \left[\frac{\sigma}{\tau - \sigma} + K_j(\tau, \sigma) \right] d\tau = v_j(\sigma), \quad j = 1, 2, \quad (10)$$

где

$$K_j(\tau, \sigma) = (-1)^{j+1} \frac{MR^2}{2} \left[\frac{\sigma}{r^2\tau - R^2\sigma} - \frac{\tau}{r^2\sigma - R^2\tau} \right];$$

$$v_1(\sigma) = -\frac{iQr}{\mu_1 + \mu_2} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right); \quad v_2(\sigma) = -\frac{iQr}{2\mu_2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} M \right) \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right);$$

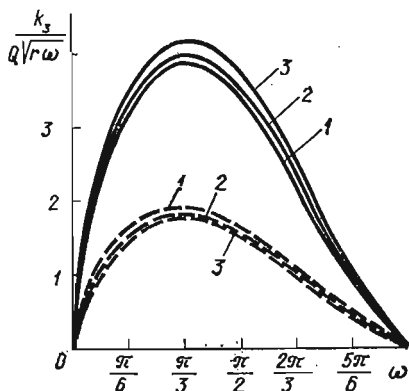


Рис. 2

τ и σ — точки дуги L , лежащей на единичной окружности; Q — усилия на бесконечности.

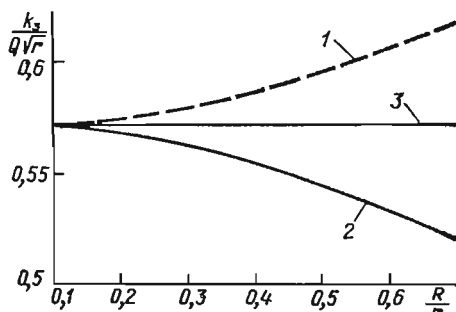


Рис. 3

Заменой переменных $\tau = e^{i\omega\varphi}$, $\sigma = e^{i\omega\varphi_0}$ уравнение (10) приводим к виду

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 g_j(\varphi) \left[\frac{1}{\varphi - \varphi_0} + K_j^1(\varphi, \varphi_0) \right] d\varphi = i\omega v_j(\varphi_0), \quad (11)$$

$$K_j^1(\varphi, \varphi_0) = i\omega K_j(\varphi, \varphi_0) + \frac{e^{i\omega\varphi_0}}{e^{i\omega\varphi} - e^{i\omega\varphi_0}} - \frac{1}{\varphi - \varphi_0}, \quad K_j^1(\varphi_0, \varphi_0) = i\omega K_j(\varphi_0, \varphi_0).$$

Это уравнение решалось численным методом, предложенным в работе [2].

На рис. 2 представлены зависимости величин коэффициентов интенсивности напряжений для дугообразной трещины во включении от угла ее раствора ω . Сплошными линиями изображены кривые для $\Lambda = \mu_1/\mu_2 = 2$, штриховыми — для $\Lambda = 0,5$. Линии 1—3 соответствуют значениям $r/R = 0,3; 0,5; 0,7$. Как видно из графиков, коэффициент интенсивности для трещины в жестком включении больше, чем в мягком. При приближении трещины к границе раздела сред в первом случае он увеличивается, а во втором уменьшается. Максимального значения коэффициенты интенсивности достигают при угле раствора $2\omega = \frac{2\pi}{3}$.

На рис. 3 приведены зависимости коэффициентов интенсивности напряжений от отношения радиуса включения к радиусу трещины в случае, когда трещина с углом раствора $2\omega = \frac{2\pi}{3}$ размещена в матрице. Кривые 1—3 соответствуют параметру $\Lambda = 2; 0,5; 1$.

Из анализа полученных результатов следует, что наличие жесткого

включения увеличивает, а мягкого уменьшает коэффициенты интенсивности, причем с приближением к границе слая в первом случае они растут, а во втором — убывают.

Для однородного материала ($\mu_1 = \mu_2, M = 0$) уравнение (10) допускает точное решение. Используя формулу обращения интеграла типа Коши [1], получаем

$$g'(\sigma) = \frac{Qr}{\mu} \frac{\sigma(\sigma-1)\cos\omega + \sigma^3 - 1}{\sigma^2 \sqrt{(\sigma - e^{i\omega})(\sigma - e^{-i\omega})}}$$

и по формуле (9) находим выражение для коэффициента интенсивности напряжений

$$k_3 = Q \sqrt{\pi r \sin\omega} \cos \frac{\omega}{2}.$$

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— М.: Физматгиз, 1958.— 544 с.
2. Каландия А. Л. Математические методы двумерной упругости.— М.: Наука, 1973.— 204 с.
3. Кит Г. С. Об аналогии между продольным сдвигом и стационарной теплопроводностью тел с включениями и трещинами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 4, с. 334—337.
4. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М.: Наука, 1966.— 708 с.
5. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения.— М.: Наука, 1974.— 340 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
21.03.79

УДК 536.12÷539.376

Ю. М. Коляно, Е. Г. Грицько

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ ИЗМЕНЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛООТДАЧИ

Пусть тело в цилиндрической системе координат занимает пространство $0 \leq r \leq r_0, 0 \leq z \leq z_0, 0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ и его поверхности $z = 0, z = z_0, \varphi = 0, \varphi = \varphi_0$ теплоизолированы. Через поверхность $r = r_0$ осуществляется конвективный теплообмен с внешней средой, причем коэффициент теплоотдачи с области Γ_0 поверхности $r = r_0$ и температура внешней среды $t_c(z, \varphi)$, омывающей эту область, есть функции координат z, φ . Остальная часть поверхности $r = r_0$ омывается внешней средой нулевой температуры при постоянном коэффициенте теплоотдачи с этой поверхности.

Обозначим относительные коэффициенты теплоотдачи соответственно $h_0(z, \varphi)$ с области Γ_0 и h_1 за пределами Γ_0 . Краевая задача для определения температурного поля в рассматриваемом теле имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=z_0} = \frac{\partial t}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = \frac{\partial t}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial t}{\partial r} = -h_1 t - \{ [h_0(z, \varphi) - h_1] t - h_0(z, \varphi) t_c(z, \varphi) \chi_0(z, \varphi) \} \quad \text{при } r = r_0, \quad (3)$$

где

$$\chi_0(z, \varphi) = \begin{cases} 1 & \text{при } z, \varphi \in \Gamma_0, \\ 0 & \text{при } z, \varphi \notin \Gamma_0. \end{cases}$$