

А. Р. Гачкевич, М. Т. Солодяк

**ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ И НАПРЯЖЕНИЯ
В МАГНИТОТВЕРДОМ УПРУГОМ СЛОЕ
ПРИ ИНДУКЦИОННОМ НАГРЕВЕ В ПЕРИОДИЧЕСКОМ
ВО ВРЕМЕНИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ**

Рассмотрим задачу об индукционном нагреве слоя из магнитотвердого материала, на поверхности $z = 0$ которого поддерживается напряженность магнитного поля $\vec{H}^{(0)} = \{0, H_0 \cos \omega t^*, 0\}$, где ω — частота, t^* — время. Принимаем, что термоупругое состояние обусловлено силовым действием электромагнитного поля на индукционные токи и выделением при их протекании джоулева тепла, а также тепловыделениями вследствие перемагничивания. При этом исходим из известной в литературе расчетной схемы решения задачи [9], в которой джоулево тепло и ponderomotorная сила усредняются по периоду колебаний электромагнитной волны в пренебрежении связанностью полей деформации и температуры, а также влиянием подвижности среды на электрические токи, т. е. закон Ома принимаем в виде

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (1)$$

где \vec{j} — плотность тока; σ — коэффициент электропроводности; \vec{E} — вектор напряженности электрического поля. Зависимость между индукцией $\vec{B} = \{0, B(z, t), 0\}$ и напряженностью $\vec{H} = \{0, H(z, t), 0\}$ магнитного поля выбираем в виде динамической петли гистерезиса [1—3, 5]:

$$b = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{arctg} \sqrt{\varepsilon} \left(h - \chi \frac{\partial h}{\partial t} \right). \quad (2)$$

Здесь

$$h = \frac{H}{H_0}; \quad b = \frac{B}{\mu \mu_0 H_0}; \quad \varepsilon = (\alpha H_0)^2; \quad \chi = \frac{H_c}{H_0}; \quad \alpha = \frac{\mu \mu_0}{\beta};$$

$$\beta = \frac{2}{\pi} B_s; \quad t = \omega t^*;$$

μ_0 — магнитная проницаемость вакуума; μ — начальная магнитная проницаемость материала; H_c — коэрцитивная сила; B_s — индукция насыщения. Параметр ε характеризует нелинейную зависимость между b и h , а параметр χ — петлю гистерезиса. Функцией arctg учитываем возможность насыщения магнитной индукции.

На основании уравнений электродинамики в пренебрежении токами смещения в области слоя для определения отличной от нуля составляющей напряженности магнитного поля $h(z, t)$ получаем уравнение

$$\left[1 + \varepsilon \left(h - \chi \frac{\partial h}{\partial t} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{\gamma^2}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial t} - \chi \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \right) \quad (3)$$

для области слоя и

$$\frac{\partial^2 h^{(0)}}{\partial z^2} = k_0^2 \frac{\partial^2 h^{(0)}}{\partial t^2} \quad (4)$$

для области вакуума при таких контактных условиях на поверхности $z = 1$:

$$h(1, t) = h^{(0)}(1, t), \quad \frac{\partial h(1, t)}{\partial z} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \int_0^t \frac{\partial h^{(0)}(1, t)}{\partial z} dt \quad (5)$$

и условиях излучения на бесконечности:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |h^{(0)}(z, t)| < \infty, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{\partial h^{(0)}}{\partial z} + k_0 \frac{\partial h^{(0)}}{\partial t} \right| = 0. \quad (6)$$

Здесь $\gamma^2 = 2\mu_0\sigma\omega\hbar^2$; \hbar^2 — толщина слоя; $k_0^2 = \varepsilon_0\mu_0\omega^2\hbar^2$.

Рассмотрим внешние поля и материалы, для которых $\varepsilon < 1$. Решение данной задачи ищем в виде ряда по малому параметру ε :

$$h(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n h_n(z, t). \quad (7)$$

Ограничиваясь нулевым и первым приближением в разложении (7) и во всех искомым функциях, получаем соответственно

$$\begin{aligned} h_0(z, t) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\Delta} [e^{-lx} - e^{lx}] e^{it} + \frac{1}{\Delta^*} [e^{-l^*x} - e^{l^*x}] e^{-it} \right\}, \\ h_1(z, t) &= L_3(z) e^{3it} + L_1(z) e^{it} + L_1^*(z) e^{-it} + L_3^*(z) e^{-3it}, \\ L_1(z) &= L_1^{\dot{}}(z) + L_1^{\ddot{}}(z), \quad L_3(z) = L_3^{\dot{}}(z) + L_3^{\ddot{}}(z), \\ L_1^{\dot{}}(z) &= \frac{L_1^{\dot{}}(0)}{\Delta} [e^{lx} - e^{-lx}], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} L_1^{\ddot{}}(z) &= -\frac{1 + \chi^2}{16\Delta^2\Delta^*} \left\{ \frac{\kappa^2 + i(2\kappa - \chi)}{5 + 8\kappa\chi} |e^{-(2l+l^*)x} - e^{(2l+l^*)x}| + \right. \\ &\left. + \frac{\kappa[2\chi - \kappa + i(2 + \kappa\chi)]}{5 + 2\kappa\chi} |e^{-(2l-l^*)x} - e^{(2l-l^*)x}| + 2(1 - \chi i) |e^{-l^*x} - e^{l^*x}| \right\}, \end{aligned}$$

$$L_3^{\dot{}}(z) = \frac{L_3^{\dot{}}(0)}{\Delta_1} [e^{lx} - e^{-lx}],$$

$$\begin{aligned} L_3^{\ddot{}}(z) &= -\frac{1}{48\Delta^3} \left\{ [1 - 3\chi^2 - \chi i(3 - \chi^2)] [e^{-3lx} - e^{3lx}] + \right. \\ &\left. + \frac{9[1 + 9\chi^2 - 4\chi^4 + i\chi(1 - 11\chi^2)]}{1 + 16\chi^2} [e^{-lx} - e^{lx}] \right\}, \end{aligned}$$

где $x = 1 - z$; $\Delta = e^{-l} - e^l$; $\Delta_1 = e^{-l_1} - e^{l_1}$; $l = \frac{\gamma(\kappa + i)}{2\sqrt{\kappa}}$; $l_1 = \frac{\gamma\sqrt{3}(\kappa_1 + i)}{2\sqrt{\kappa_1}}$; $\kappa = \chi + \sqrt{\chi^2 + 1}$; $\kappa_1 = 3\chi + \sqrt{9\chi^2 + 1}$; звездочкой обозначены комплексно-сопряженные величины.

Из анализа формул (8) следует, что при $\gamma \geq 6$ (приповерхностный нагрев) функции $h_0(z, t)$, $L_1(z)$, $L_3(z)$ практически описываются формулами

$$\begin{aligned} h_0(z, t) &= \frac{1}{2} (e^{-lz+it} + e^{-l^*z-it}), \\ L_1(z) &= \frac{(1 + \chi^2)[\kappa^2 + i(2\kappa - \chi)]}{16(5 + 8\kappa\chi)} (e^{-lz} - e^{-(2l+l^*)z}), \\ L_3(z) &= \frac{1 - 3\chi^2 - \chi i(3 - \chi^2)}{48} (e^{-l_1z} - e^{-3l_1z}). \end{aligned} \quad (9)$$

По известной формуле для джоулева тепла $Q(z, t) = \sigma E^2(z, t)$ с учетом соотношений (8) найдем выражения для удельной мощности джоулева тепла, усредненного по периоду колебаний электромагнитной волны:

$$q_0(z) = \sum_{j=1}^4 a_{1,j} e^{\alpha_j z^2}, \quad q_1(z) = \sum_{j=5}^{20} a_{1,j} e^{\alpha_j z^2}. \quad (10)$$

Здесь

$$q(z) = \frac{Q(z)}{Q_0}; \quad Q_0 = \frac{H_0^2}{4\sigma\hbar^2}; \quad Q(z) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} Q(z, t) dt;$$

$$\begin{aligned}
a_{1,1} &= e^{\gamma\sqrt{\kappa}} A_0; & a_{1,2} &= e^{-\gamma\sqrt{\kappa}} A_0; & a_{1,3} &= e^{\frac{i\gamma}{\sqrt{\kappa}}} A_0; & a_{1,4} &= \dot{a}_{1,3}; \\
a_{1,5} &= -\frac{4(1+\kappa\chi)}{\Delta\Delta^*} e^{\gamma\sqrt{\kappa}} A_0 A_0'; & a_{1,6} &= -\frac{4(1+\kappa\chi)}{\Delta\Delta^*} e^{-\gamma\sqrt{\kappa}} A_0 A_0'; \\
a_{1,7} &= -\frac{4(1+\kappa\chi)}{\Delta\Delta^*} e^{\frac{i\gamma}{\sqrt{\kappa}}} A_0 A_0'; & a_{1,8} &= \dot{a}_{1,7}; \\
a_{1,9} &= e^l A_1 A_0'; & a_{1,10} &= \dot{a}_{1,9}; & a_{1,11} &= e^{-l} A_1 A_0'; & a_{1,12} &= \dot{a}_{1,11}; \\
a_{1,13} &= -ie^l A_2 A_0'; & a_{1,14} &= -ie^{-l} A_2 A_0'; & a_{1,15} &= \dot{a}_{1,13}; & a_{1,16} &= \dot{a}_{1,14}; \\
a_{1,17} &= -2e^{2\gamma\sqrt{\kappa}} A_3 A_0'; & a_{1,18} &= -2e^{-2\gamma\sqrt{\kappa}} A_3 A_0'; & a_{1,19} &= 2e^{\frac{2i\gamma}{\sqrt{\kappa}}} A_4 A_0'; \\
a_{1,20} &= \dot{a}_{1,19}; \\
A_0 &= \frac{\gamma^2(1+\kappa\chi)}{2\kappa\left(\operatorname{ch}\gamma\sqrt{\kappa} - \cos\frac{\gamma}{\sqrt{\kappa}}\right)}; & A_0' &= \frac{\gamma^2(1+\kappa\chi)}{8\kappa(\Delta\Delta^*)^2}; & A_1 &= A_4 - A_3; & A_2 &= \\
&= \frac{5\kappa\chi^2 + 3\kappa + 2\chi}{5 + 8\kappa\chi} + \frac{4\kappa\chi^4 + 9\kappa\chi^2 + 2\chi^3 + 3\kappa + 4\chi}{5 + 2\kappa\chi} + 2\kappa(1 + \chi^2); \\
A_3 &= \frac{2(6\kappa\chi^3 + 3\chi^2 + 5\kappa\chi + 2)}{5 + 8\kappa\chi}; & A_4 &= \frac{2(2\kappa\chi^3 + 3\kappa\chi + \chi^2 + 2)}{5 + 2\kappa\chi}; \\
A &= \left(\frac{\kappa^2}{5 + 8\kappa\chi} + \frac{1}{5 + 2\kappa\chi} - 2\right) \operatorname{ch}\gamma\sqrt{\kappa} \cos\frac{\gamma}{\sqrt{\kappa}} - \\
&- \left(\frac{2\kappa - \chi}{5 + 8\kappa\chi} - \frac{2\kappa\chi + 2\kappa + \chi}{5 + 2\kappa\chi} - 2\chi\right) \operatorname{sh}\gamma\sqrt{\kappa} \sin\frac{\gamma}{\sqrt{\kappa}} - \\
&- \frac{\kappa^2}{5 + 8\kappa\chi} \operatorname{ch}2\gamma\sqrt{\kappa} - \frac{1}{5 + 2\kappa\chi} \cos\frac{2\gamma}{\sqrt{\kappa}} + 2; \\
\alpha_1 &= -\gamma\sqrt{\kappa}; & \alpha_2 &= -\alpha_1; & \alpha_3 &= -\frac{i\gamma}{\sqrt{\kappa}}; & \alpha_4 &= \alpha_3; & \alpha_5 &= \alpha_1; \\
\alpha_6 &= \alpha_2; & \alpha_7 &= \alpha_3; & \alpha_8 &= \alpha_4; & \alpha_9 &= -l; & \alpha_{10} &= \dot{\alpha}_9; & \alpha_{11} &= \\
&= -\alpha_9; & \alpha_{12} &= \dot{\alpha}_{11}; & \alpha_{13} &= \alpha_9; & \alpha_{14} &= -\alpha_{10}; & \alpha_{15} &= -\alpha_{11}; \\
\alpha_{16} &= \alpha_{12}; & \alpha_{17} &= 2\alpha_1; & \alpha_{18} &= -2\alpha_1; & \alpha_{19} &= -2\alpha_3; & \alpha_{20} &= \dot{\alpha}_{19}.
\end{aligned}$$

Для приповерхностного нагрева формулы (10) примут вид

$$\begin{aligned}
q_0(z) &= \frac{\gamma^2(1+\kappa\chi)}{\kappa} e^{-\gamma\sqrt{\kappa}z}, \\
q_1(z) &= \frac{\gamma^2(1+\chi^2)}{4\kappa(5+8\kappa\chi)} |\kappa^2(1+\kappa\chi) e^{-\gamma\sqrt{\kappa}z} - 2(6\kappa\chi^3 + 3\chi^2 + \\
&\quad + 5\kappa\chi + 2) e^{-2\gamma\sqrt{\kappa}z}|. \tag{11}
\end{aligned}$$

Дополнительные к джоулевым тепловыделения, вызванные переманчиванием (гистерезисное тепло), определяются по формуле [4, 7]

$$\tilde{q} = \nu \oint h db = \omega \int_0^{2\pi} h \frac{\partial b}{\partial t} dt, \tag{12}$$

где $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$; $\tilde{q} = \frac{\tilde{Q}}{Q_0}$; \tilde{Q} — удельные потери на гистерезис в единицу времени, усредненные по периоду колебаний. Соответственно для рассматриваемой задачи получим

$$\tilde{q}_0(z) = \sum_{i=1}^4 a_{2,i} e^{\alpha_i r^2}, \quad \tilde{q}_1(z) = \sum_{i=5}^{20} a_{2,i} e^{\alpha_i r^2}, \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}
 a_{2,1} &= e^{\gamma\sqrt{\kappa}} B_0; & a_{2,2} &= e^{-\gamma\sqrt{\kappa}} B_0; & a_{2,3} &= -e^{\frac{i\gamma}{\sqrt{\kappa}}} B_0; & a_{2,4} &= a_{2,3}^*; \\
 a_{2,5} &= -\frac{4A}{\Delta\Delta^*} e^{\gamma\sqrt{\kappa}} B_0'; & a_{2,6} &= -\frac{4A}{\Delta\Delta^*} e^{-\gamma\sqrt{\kappa}} B_0'; & a_{2,7} &= \frac{4A}{\Delta\Delta^*} e^{\frac{i\gamma}{\sqrt{\kappa}}} B_0'; \\
 & & a_{2,8} &= a_{2,7}^*; \\
 a_{2,9} &= e^i B_1 B_0'; & a_{2,10} &= a_{2,9}^*; & a_{2,11} &= e^{-i^*} B_1 B_0'; & a_{2,12} &= a_{2,11}^*; \\
 a_{2,13} &= i e^i B_2 B_0'; & a_{2,14} &= i e^{-i^*} B_2 B_0'; & a_{2,15} &= a_{2,13}^*; & a_{2,16} &= a_{2,14}^*; \\
 a_{2,17} &= 2e^{2\gamma\sqrt{\kappa}} B_3 B_0'; & a_{2,18} &= 2e^{-2\gamma\sqrt{\kappa}} B_3 B_0'; & a_{2,19} &= 2e^{\frac{2i\gamma}{\sqrt{\kappa}}} B_4 B_0'; & a_{2,20} &= a_{2,19}^*; \\
 B_0 &= \frac{\gamma^2 \chi}{4 \left(\operatorname{ch} \gamma \sqrt{\kappa} - \cos \frac{\gamma}{\sqrt{\kappa}} \right)}; & B_0' &= \frac{\gamma^2 \chi}{16 (\Delta\Delta^*)^2}; \\
 B_1 &= B_3 + B_4 - 6; & B_2 &= \frac{2\kappa - \chi}{5 + 8\kappa\chi} - \frac{2\kappa\chi^2 + 2\kappa + \chi}{5 + 2\kappa\chi} - 2\chi; \\
 B_3 &= \frac{\kappa^2}{5 + 8\kappa\chi} + 1; & B_4 &= \frac{1}{5 + 2\kappa\chi} + 1.
 \end{aligned}$$

При $\gamma \geq 6$ приближенно находим

$$\begin{aligned}
 \tilde{q}_0(z) &= \frac{\gamma^2 \chi}{2} e^{-\gamma\sqrt{\kappa} z}, \\
 \tilde{q}_1(z) &= \frac{\gamma^2 \chi (1 + \chi^2)}{8(5 + 8\kappa\chi)} \left[(1 + 2\kappa\chi) e^{-\gamma\sqrt{\kappa} z} - 2(3 + 5\kappa\chi) e^{-2\gamma\sqrt{\kappa} z} \right].
 \end{aligned} \tag{14}$$

Выражение для пондеромоторной силы $\vec{F} = \vec{j} \times \vec{B}$ в данном случае примет вид [9]

$$\vec{F} = \{0, 0, F(z)\}. \tag{15}$$

Здесь $F(z) = F_0 f(z)$, $f = eb$, $F_0 = \frac{\mu\mu_0 H_0^2}{h_*}$. С учетом формул (2) и (8), усредняя по периоду колебаний, получаем

$$f_0(z) = \sum_{j=1}^4 a_{3,j} e^{\alpha_j z}, \quad f_1(z) = \sum_{j=5}^{20} a_{3,j} e^{\alpha_j z},$$

где

$$\begin{aligned}
 a_{3,1} &= (\kappa - \chi) e^{\gamma\sqrt{\kappa}} C_0; & a_{3,2} &= -(\kappa - \chi) e^{-\gamma\sqrt{\kappa}} C_0; \\
 a_{3,3} &= -i(1 + \kappa\chi) e^{\frac{i\gamma}{\sqrt{\kappa}}} C_0; & a_{3,4} &= a_{3,3}^*; \\
 a_{3,5} &= -\frac{4(\kappa - \chi)}{\Delta\Delta^*} e^{\gamma\sqrt{\kappa}} C_0'; & a_{3,6} &= -\frac{4(\kappa - \chi)}{\Delta\Delta^*} e^{-\gamma\sqrt{\kappa}} C_0'; \\
 a_{3,7} &= \frac{4i(1 + \kappa\chi)}{\Delta\Delta^*} e^{\frac{i\gamma}{\sqrt{\kappa}}} C_0'; & a_{3,8} &= a_{3,7}^*; & a_{3,9} &= e^i C_1 C_0'; \\
 a_{3,10} &= a_{3,9}^*; & a_{3,11} &= -e^{-i^*} C_1 C_0'; \\
 a_{3,12} &= a_{3,11}^*; & a_{3,13} &= i e^i C_2 C_0'; & a_{3,14} &= a_{3,13}^*; \\
 a_{3,15} &= -i e^{i^*} C_2 C_0'; & a_{3,16} &= a_{3,15}^*; & a_{3,17} &= \\
 &= -2e^{2\gamma\sqrt{\kappa}} C_3 C_0'; & a_{3,18} &= 2e^{-2\gamma\sqrt{\kappa}} C_3 C_0'; & a_{3,19} &=
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
&= -2ie^{\frac{2t\gamma}{\sqrt{\kappa}}} C_4 C_0'; \quad a_{3,20} = a_{3,19}^*; \\
C_0 &= \frac{\gamma}{2\sqrt{\kappa} \Delta\Delta^*}; \quad C_0' = \frac{\gamma(1+\chi^2)}{16\sqrt{\kappa} (\Delta\Delta^*)^2}; \\
C_1 &= \frac{3\kappa - \chi + 2\kappa\chi}{5 + 2\kappa\chi} - \frac{\kappa + \chi + 2\kappa\chi^2}{5 + 8\kappa\chi}; \quad C_2 = \frac{3 + 7\kappa\chi + 4\chi^2 + 8\kappa\chi^3}{5 + 8\kappa\chi} - \frac{1 + \kappa\chi}{5 + 2\kappa\chi}; \\
C_3 &= \frac{2\kappa + \chi + 3\kappa\chi^2}{5 + 8\kappa\chi} + \kappa - \chi; \quad C_4 = \frac{2 + 3\kappa\chi + \chi^2 + 2\kappa\chi^3}{5 + 2\kappa\chi} + 1 + \kappa\chi.
\end{aligned}$$

Для $\gamma \geq 6$ формулы (16) упростятся и будут такими:

$$\begin{aligned}
f_0(z) &= \frac{\gamma(\kappa - \chi)}{2\sqrt{\kappa}} e^{-\gamma\sqrt{\kappa}z}, \quad (17) \\
f_1(z) &= \frac{\gamma(1 + \chi^2)}{8\sqrt{\kappa}(5 + 8\kappa\chi)} [(\kappa + \chi + 2\kappa\chi^2) e^{-\gamma\sqrt{\kappa}z} - (7\kappa + 4\chi + 11\kappa\chi^2) e^{-2\gamma\sqrt{\kappa}z}].
\end{aligned}$$

При определении температурного поля и напряжений будем считать, что на верхнем основании слоя имеет место конвективный теплообмен с внешней средой, температура которой равна начальной температуре T_0 слоя. Температурное поле находим из уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + q_* = \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (18)$$

при начальном $t(z, 0) = 0$ и граничных условиях

$$\begin{aligned}
\frac{\partial t}{\partial z} - \text{Bi}_1 t &= 0 \quad \text{при } z = 0, \\
\frac{\partial t}{\partial z} + \text{Bi}_2 t &= 0 \quad \text{при } z = 1.
\end{aligned} \quad (19)$$

Здесь $t = (T - T_0)/\bar{T}$ — безразмерная температура; $\bar{T} = \frac{H_0^2}{4\sigma\lambda}$; Bi_1 ,

Bi_2 — критерий Био на основаниях $z = 0$ и $z = 1$; $\tau = \frac{at^*}{h_*^2}$ — критерий Фурье; λ, a — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности соответственно; $q_* = q + \bar{q}$.

На основании линейности уравнения теплопроводности и формул (10), (13) функцию $t(z, \tau)$ находим в виде

$$t(z, \tau) = \sum_{i=1}^{20} a_i t_i(z, \tau), \quad a_i = a_{1,i} + a_{2,i}. \quad (20)$$

Решение строим с использованием преобразования Лапласа [6]. Для теплоизолированного на основаниях слоя ($\text{Bi}_1 = \text{Bi}_2 = \text{Bi} = 0$) получаем

$$\begin{aligned}
t_i(z, \tau) &= \frac{1}{\alpha_j} \left\{ (e^{\alpha_j} - 1) \left(\tau + \frac{z^2}{2} + \frac{1}{\alpha_j^2} - \frac{1}{6} \right) + z - \frac{1}{2} - \frac{e^{\alpha_j z}}{\alpha_j} + \right. \\
&\quad \left. + 2\alpha_j^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m [(-1)^{m+1} + e^{\alpha_j}] \cos \pi m z}{\pi^2 m^2 (\pi^2 m^2 + \alpha_j^2)} e^{-\pi^2 m^2 \tau} \right\}. \quad (21)
\end{aligned}$$

При условиях конвективного теплообмена на поверхностях слоя находим

$$t_j(z, \tau) = -\frac{e^{\alpha_j z}}{\alpha_j^2} + \frac{(\alpha_j + \text{Bi}_2)(1 + \text{Bi}_1 z) e^{\alpha_j} - (\alpha_j - \text{Bi}_2)[1 + \text{Bi}_2(1 - z)]}{\alpha_j^2 (\text{Bi}_1 + \text{Bi}_2 + \text{Bi}_1 \text{Bi}_2)} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left[(\alpha_j - Bi_1) \frac{\mu_m^2 + Bi_2^2}{\mu_m (Bi_1 + Bi_2)} \sin \mu_m - (\alpha_j + Bi_2) e^{\alpha_j} \right] \left(\cos \mu_m z + \frac{Bi_1 \sin \mu_m z}{\mu_m} \right)}{(\mu_m^2 + \alpha_j^2) \left\{ \frac{1}{2} [\mu_m^2 - (Bi_1 + Bi_2 + Bi_1 Bi_2)] \cos \mu_m + \left(1 + \frac{Bi_1 + Bi_2}{2} \right) \mu_m \sin \mu_m \right\}} \times e^{-\mu_m^2 \tau} \quad (22)$$

Здесь μ_m — ненулевые корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{ctg} \mu_m = \frac{\mu_m^2 - Bi_1 Bi_2}{\mu_m (Bi_1 + Bi_2)}. \quad (23)$$

При определении напряжений принимаем, что основание $z = 0$ свободно от силовой нагрузки, а при $z =$

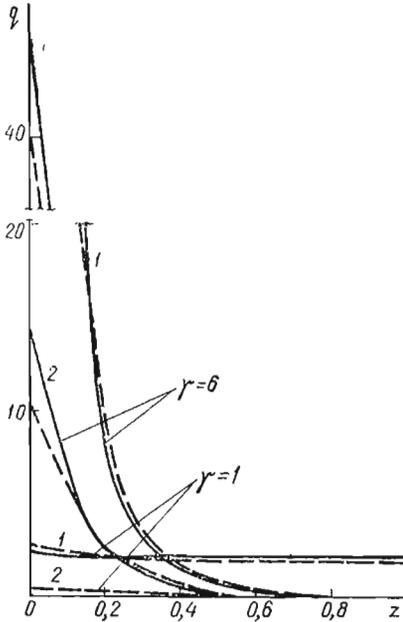


Рис. 1

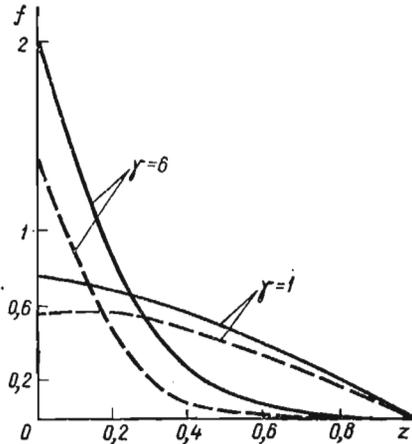


Рис. 2

$= 1$ перемещение $u_z = 0$. Из уравнений термоупругости в квазистатической постановке [9], полагая $u_{xx} = u_{yy} = 0$, приходим к уравнению

$$\frac{\partial \sigma_*}{\partial z} + s_0 f = 0 \quad (24)$$

при граничных условиях

$$\sigma_*(z=0) = 0, \quad u_z(1, \tau) = 0, \quad (25)$$

где

$$\sigma_* = \frac{\sigma_{zz}}{\sigma_0}; \quad \sigma_0 = \frac{\alpha_t E}{1-\nu} \frac{H_0^2}{4s\lambda}; \quad s_0 = \frac{2\mu\mu_0(1-\nu)\sigma\lambda}{\alpha_t E};$$

α_t — линейный коэффициент температурного расширения; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; σ_{zz} — нормальные напряжения в направлении оси z . Нормальные напряжения σ_{xx} и σ_{yy} определяются по формуле

$$\sigma = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_* - t, \quad (26)$$

где $\sigma = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_0} = \frac{\sigma_{yy}}{\sigma_0}$. На основании формулы (16) можно записать

$$\sigma_*(z) = \sum_{j=1}^{20} a_{3,j} \sigma_{*j}(z). \quad (27)$$

Интегрируя уравнение (24) при граничных условиях (25), с учетом фор-

мулы (27) получаем

$$\sigma_{*j}(z) = -\frac{s_0}{\alpha_j} (e^{\alpha_j z} - 1). \quad (28)$$

Численные исследования проведены для слоя из магнитотвердой стали ЮНД4 при $\chi = 0,8$, $\mu = 20\,000$, $\varepsilon = 0,6$.

На рис. 1 представлены графики изменения джоулева (кривые 1) и гистерезисного (кривые 2) тепла по толщине слоя для различных значений γ . Сплошными линиями показано распределение тепла в нулевом ($\varepsilon = 0$), штриховыми—в первом приближениях. Из графиков видно, что при выбранном материале и фиксированной толщине слоя с увеличением частоты ω (увеличение γ) интенсивность тепловыделений возрастает в приповерхностном

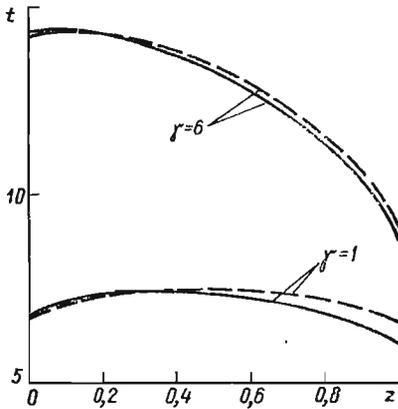


Рис. 3

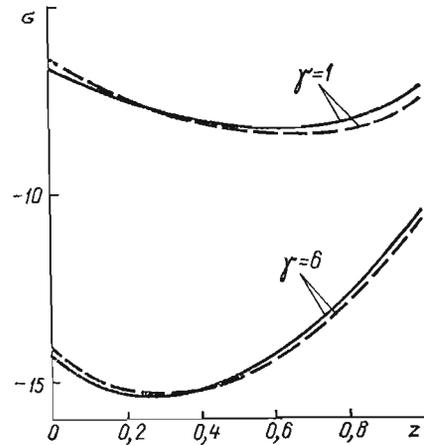


Рис. 4

слое. На рис. 2 показаны аналогичные графики распределения пондеромоторной силы по толщине слоя.

Изменение температуры по толщине слоя для установившегося режима при двух значениях $\gamma = 1; 6$ приведено на рис. 3. Коэффициенты теплоотдачи на основаниях слоя $z = 0$; 1 приняты равными: $Bi_1 = Bi_2 = Bi = 0,2$. Как следует из рис. 3, при $\gamma = 6$ имеет место значительная неравномерность температурного поля по толщине, при $\gamma = 1$ температурное поле по толщине изменяется незначительно.

На рис. 4 показано распределение нормальных напряжений по толщине слоя. Как следует из графиков, для установившегося режима по всей толщине слоя имеют место сжимающиеся напряжения.

Из проведенного анализа видно, что в отличие от индукционного нагрева магнитомягкого материала [8] учет петли гистерезиса приводит к дополнительным тепловыделениям, равным по порядку джоулевым, и перераспределению пондеромоторной силы, что существенно меняет уровни напряжений по толщине слоя.

1. Бладыко В. М., Мазуренко А. А. Аппроксимация петель гистерезиса ферромагнитных материалов.— Изв. вузов. Энергетика, 1967, № 9, с. 50—55.
2. Болдов Б. А., Задерей Г. П., Сушинев А. К. Аппроксимация симметричных петель гистерезиса ферромагнитных материалов.— Тр. Моск. энерг. ин-та, 1975, вып. 233, с. 81—84.
3. Зацепин Н. Н., Шапоров Б. Д. К нелинейной теории поля вихревых токов, возбуждаемых в ферромагнетике с подмагничиванием.— Вестн АН БССР, 1974, № 3, с. 69—77.
4. Кифер И. И. Испытания ферромагнитных материалов.— М.: Энергия, 1969.— 360 с.
5. Колесников П. М. Введение в нелинейную электродинамику.— Минск: Наука и техника, 1971.— 384 с.
6. Лыков А. В. Теория теплопроводности.— М.: Высш. школа, 1967.— 600 с.
7. Прибраженский А. А. Магнитные материалы и элементы.— М.: Высш. школа, 1976.— 336 с.

8. Солодяк М. Т. Термоупругое состояние магнитомягкого упругого полупространства в установившемся периодическом во времени электромагнитном поле.— В кн.: Материалы V конф. молодых ученых Льв. фил. мат. физики Ин-та математики АН УССР. Секция механики и деформируемого твердого тела.— Львов, 1978, с. 106—108. Рукопись деп. в ВИНТИ, № 3778—78 Деп.
9. Термоупругость электропроводных тел / Я. С. Подстригач, Я. И. Бурак, А. Р. Гачкевич, Л. В. Чернявская.— Киев : Наук. думка, 1977.— 248 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

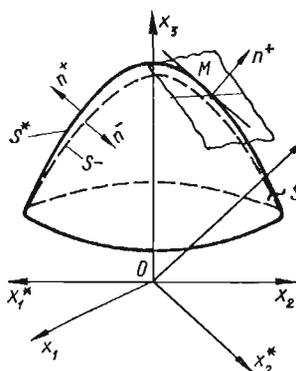
Поступила в редколлегию
26.06.79

УДК 539.377

М. В. Хай

**ТЕРМОУПРУГИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ
ДЛЯ ТЕЛА С ТРЕЩИНОЙ,
РАЗМЕЩЕННОЙ ПО ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

В настоящее время большинство исследований термоупругого состояния тел с трещинами проведено для случая плоских трещин. Такое состояние объясняется тем, что исходные задачи достаточно просто сводятся к сингулярным интегро-дифференциальным двумерным уравнениям, которые для частных случаев решаются в замкнутом виде. Когда имеется трещина, размещенная



по произвольной поверхности, непосредственное применение методики сведения задач теплопроводности и термоупругости к интегральным уравнениям затруднительно. Однако решения дифференциальных уравнений задач теплопроводности и термоупругости, полученные при рассмотрении плоских трещин, могут быть эффективно использованы для построения соответствующих термоупругих потенциалов, с использованием которых уже можно свести исходные задачи к сингулярным интегральным уравнениям, в которых интегрирование ведется по поверхности трещины. Для построения потенциалов теории упругости в литературе известны

подходы, основанные на использовании фундаментальных решений уравнений теории упругости и обобщенных теорем Бетти [4]. Предлагаемая в настоящей работе методика построения потенциалов термоупругости, с помощью которых решается задача термоупругости для бесконечного тела с размещенной по произвольной поверхности трещиной, основана на использовании результатов, полученных при решении аналогичных задач в случае плоских трещин.

Рассмотрим бесконечное тело, ослабленное размещенной по произвольной поверхности трещиной и находящееся под действием заданных на поверхностях трещины тепловых и механических нагрузок. Требуется свести задачу об определении температурных полей и обусловленных ими напряжений к интегральным уравнениям. Отметим, что к рассматриваемой задаче сводятся задачи теплопроводности и термоупругости, когда значения тепловых и механических нагрузок заданы не на поверхностях трещины, а на произвольной поверхности в теле, в частности на бесконечности.

Обозначим через S область, занятую трещиной, а через S^+ и S^- — противоположные ее поверхности. Выберем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ в произвольной точке тела и установим направление нормалей на поверхностях S^\pm . Направление нормалей зададим таким образом, что на-