

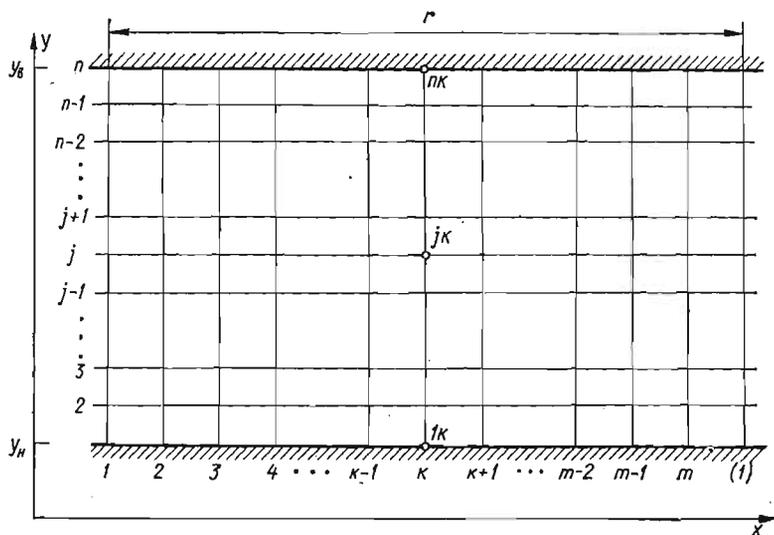
**РАСЧЕТ СТАЦИОНАРНОЙ ПЛОСКОЙ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ
В ПРОВОДЯЩЕЙ ФЕРРОМАГНИТНОЙ СРЕДЕ**

Рассмотрим слой проводящей ферромагнитной среды, ограниченной плоскими поверхностями, на которых заданы волны векторного магнитного потенциала, перемещающиеся вдоль граничных поверхностей с постоянной скоростью v (рисунок).

Дифференциальные уравнения Максвелла, описывающие электромагнитный процесс в любой точке рассматриваемого слоя и составленные в системе координат xOy , движущейся вместе с волной, имеют вид

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \sigma v B_y, \quad (1)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0, \quad (2)$$



где σ — удельная электрическая проводимость среды. Проекции вектора \vec{B} в каждой точке ферромагнитного слоя определяются через векторный магнитный потенциал по формулам

$$B_x = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial A}{\partial x}. \quad (3)$$

Граничными условиями являются

$$A_n = A_{nz}(x), \quad A_b = A_{bz}(x), \quad A(x) = A(x + \tau), \quad (4)$$

где A_n , A_b — значения потенциала A соответственно на нижней и верхней границах; $A_{nz}(x)$, $A_{bz}(x)$ — заданные функции координаты x ; τ — пространственный период волны. Магнитные свойства среды заданы характеристикой намагничивания

$$H_x = H_x(B_x, B_y), \quad H_y = H_y(B_x, B_y). \quad (5)$$

Уравнения (1), (2), (5) совместно с граничными условиями (4) однозначно предопределяют искомое поле внутри ферромагнитного слоя. Ввиду нелинейности характеристики (5) задачу можно решить практически только в численном виде. Ниже изложен алгоритм ее решения на основе предлагаемого метода, названного дифференциальным сеточным методом.

Заменяем реальную подлежащую расчету область поля в пределах периода сеточной областью с регулярной сеткой, шаги которой по осям x и y равны соответственно $h_x = \tau/m$, $h_y = (y_b - y_n) : (n - 1)$, где m — число узлов сетки на периоде τ ; n — число узлов по оси y на интервале $y_b - y_n$, включая граничные узлы.

Аппроксимируем уравнение (1) для узла, расположенного на пересечении j -й горизонтали и k -й вертикали, разностным уравнением

$$\eta_x (H_{jy_{k+1}} - H_{jy_{k-1}}) - \eta_y (H_{j+1,xk} - H_{j-1,xk}) - cB_{jyk} = 0, \quad (6)$$

где

$$\eta_x = \frac{1}{2h_x}; \quad \eta_y = \frac{1}{2h_y}; \quad c = \sigma v.$$

Для аппроксимации уравнения (2) в узлах с индексами $1k$, jk , nk составим разностные уравнения

$$\begin{aligned} B_{j-1,xk} &= \eta_y (-3A_{j-1,k} + 4A_{jk} - A_{j+1,k}), & B_{j-1,yk} &= -\eta_x (A_{j-1,k+1} - A_{j-1,k-1}), \\ B_{jxk} &= \eta_y (-A_{j-1,k} + A_{j+1,k}), & B_{jyk} &= -\eta_x (A_{j,k+1} - A_{j,k-1}), \\ B_{j+1,xk} &= \eta_y (A_{j-1,k} - 4A_{jk} + 3A_{j+1,k}), & B_{j+1,yk} &= -\eta_x (A_{j+1,k+1} - A_{j+1,k-1}). \end{aligned} \quad (7)$$

Введя в рассмотрение векторы-столбцы

$$H_{jx} = \text{colon} (H_{jx1}, \dots, H_{jxm}), \quad H_{jy} = \text{colon} (H_{jy1}, \dots, H_{jym}), \quad (8)$$

$$B_{jx} = \text{colon} (B_{jx1}, \dots, B_{jxm}), \quad B_{jy} = \text{colon} (B_{jy1}, \dots, B_{jym}), \quad (9)$$

$$A_j = \text{colon} (A_{j1}, \dots, A_{jm}), \quad (10)$$

представим полную нелинейную систему алгебраических уравнений, определяющую векторы H_{jx} , H_{jy} , B_{jx} , B_{jy} , A_j , для всех горизонтальных рядов узлов сетки в следующем виде:

$$A_1 = A_{n3}, \quad (11)$$

$$\eta_x a H_{jy} - \eta_y (H_{j+1,x} - H_{j-1,x}) - cB_{jy} = 0 \quad (j = 2, \dots, n-1), \quad (12)$$

$$A_n = A_{n3}, \quad (13)$$

$$B_{1x} = \eta_y (-3A_1 + 4A_2 - A_3), \quad B_{1y} = -\eta_x a A_1, \quad (14)$$

$$B_{jx} = \eta_y (-A_{j-1} + A_{j+1}), \quad B_{jy} = -\eta_x a A_j \quad (j = 2, \dots, n-1), \quad (15)$$

$$B_{nx} = \eta_y (A_{n-2} - 4A_{n-1} + 3A_n), \quad B_{ny} = -\eta_x a A_n, \quad (16)$$

$$H_{jx} = H_{jx} (B_{jx}, B_{jy}), \quad H_{jy} = H_{jy} (B_{jx}, B_{jy}), \quad (17)$$

где

$$a = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & & & & -1 \\ \hline -1 & & 1 & & & \\ \hline & -1 & & & & \\ \hline & & & \cdot & & \\ \hline & & & & & 1 \\ \hline & & & & -1 & 1 \\ \hline 1 & & & & & -1 \\ \hline \end{array} \cdot$$

c_{11}								
c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}					
c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	c_{35}				
	c_{42}	c_{43}	c_{44}	c_{46}	c_{40}			
							$c_{n-3, n-5}$	$c_{n-3, n-4}$
								$c_{n-2, n-4}$

Решим систему (11) — (17) методом продолжения решения по параметру [3]. С этой целью умножим в уравнениях (11), (13) векторы $A_{нз}$ и $A_{вз}$ на вспомогательную переменную h . В результате получим уравнения

$$A_1 = hA_{нз}, \quad A_n = hA_{вз}. \quad (18)$$

При $h = 0$ решение системы (18), (12), (14) — (17) является тривиальным (нулевым), а при $h = 1$ оно совпадает с решением системы (11) — (17). При изменении параметра h от 0 до 1 магнитное поле изменяется от нуля до искомого, а система (18), (12), (14) — (17) в неявной форме описывает некоторую траекторию в $(5nm + 1)$ -мерном линейном векторном пространстве переменных h и $H_{jxk}, H_{jyk}, B_{jxk}, B_{jyk}, A_{jk}$ ($j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m$), которая при $h = 0$ проходит через начало координат этого пространства, а при $h = 1$ — через искомое решение системы (11) — (17). Проекция этой траектории на плоскости координат, одна из которых соответствует параметру h , а другая — одной из переменных совокупности $H_{jxk}, H_{jyk}, B_{jxk}, B_{jyk}, A_{jk}$ ($j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m$), отражают явные зависимости

$$\begin{aligned} H_{jxk} &= H_{jxk}(h), & H_{jyk} &= H_{jyk}(h), \\ B_{jxk} &= B_{jxk}(h), & B_{jyk} &= B_{jyk}(h), \\ A_{jk} &= A_{jk}(h). \end{aligned} \quad (19)$$

Продифференцировав уравнения (18), (12), (14) — (17) по h , получим

$$\begin{aligned} A_1^h &= A_{нз}, \\ \eta_x a H_{iy}^n - \eta_y (H_{i+1,x}^n - H_{i-1,x}^n) - c B_{iy}^h &= 0 \quad (j = 2, \dots, n-1), \\ A_n^h &= A_{вз}; \end{aligned} \quad (20)$$

$$H_{ix}^h = \frac{\partial H_{ix}}{\partial B_{ix}} B_{ix}^h + \frac{\partial H_{ix}}{\partial B_{iy}} B_{iy}^h = v_{ixx} B_{ix}^h + v_{ixy} B_{iy}^h \quad (j = 2, \dots, n-1); \quad (21)$$

$$H_{iy}^h = \frac{\partial H_{iy}}{\partial B_{ix}} B_{ix}^h + \frac{\partial H_{iy}}{\partial B_{iy}} B_{iy}^h = v_{iyx} B_{ix}^h + v_{iyy} B_{iy}^h$$

$$B_{1x}^h = \eta_y (-3A_1^h + 4A_2^h - A_3^h), \quad B_{1y}^h = -\eta_x a A_1^h,$$

$$B_{jx}^h = \eta_y (-A_{j-1}^h + A_{j+1}^h), \quad B_{jy}^h = -\eta_x a A_j^h \quad (j = 2, \dots, n-1), \quad (22)$$

$$B_{nx}^h = \eta_y (A_{n-2}^h - 4A_{n-1}^h + 3A_n^h), \quad B_{ny}^h = -\eta_x a A_n^h,$$

где дифференцирование по h обозначено верхним индексом h ; система (20) с учетом уравнений (21), (22) в матричной записи имеет вид (23), где c_{11} ,

$c_{n-3, n-3}$	$c_{n-3, n-2}$	$c_{n-3, n-1}$	
$c_{n-2, n-3}$	$c_{n-2, n-2}$	$c_{n-2, n-1}$	$c_{n-2, n}$
$c_{n-1, n-3}$	$c_{n-1, n-2}$	$c_{n-1, n-1}$	$c_{n-1, n}$
			c_{nn}

 \times

A_1^h
A_2^h
A_3^h
A_4^h
\vdots
A_{n-3}^h
A_{n-2}^h
A_{n-1}^h
A_n^h

 $=$

$A_{нз}$
$A_{вз}$

(23)

c_{nn} — единичные матрицы n -го порядка:

$$\begin{aligned}
 c_{21} &= -3\eta_y^2 v_{1xx} - \eta_x \eta_y (v_{1xy} a - av_{2yx}); \\
 c_{22} &= -\eta_x (\eta_x av_{2yy} - c) a + \eta_y^2 (4v_{1xx} + v_{3xx}); \\
 c_{23} &= -\eta_y^2 v_{1xx} + \eta_x \eta_y (av_{2yx} + v_{3xy} a); \quad c_{24} = -\eta_y^2 v_{3xx}; \\
 c_{j, j-2} &= -\eta_y^2 v_{j-1, xx}; \quad c_{j, j-1} = -\eta_x \eta_y (v_{j-1, xy} a + av_{jyx}); \\
 c_{jj} &= \eta_y^2 v_{j-1, xx} - \eta_x (\eta_x av_{jyy} - c) a + \eta_y^2 v_{j+1, xx}; \\
 c_{j, j+1} &= \eta_x \eta_y (av_{jyx} + v_{j+1, xy} a); \quad c_{j, j+2} = -\eta_y^2 v_{j+1, xx}; \\
 c_{n-1, n-3} &= -\eta_y^2 v_{n-2, xy}; \quad c_{n-1, n-2} = -\eta_x \eta_y (v_{n-2, xy} a + av_{n-1, yx}) - \eta_y^2 v_{nxx}; \\
 c_{n-1, n-1} &= \eta_y^2 (v_{n-2, xy} + v_{nxx}) - \eta_x (\eta_x av_{n-1, yy} - c) a; \\
 c_{n-1, n} &= \eta_x \eta_y (av_{n-1, yx} + v_{nxy} a) - 3\eta_y^2 v_{nxx}.
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Получили замкнутую систему уравнений (23), порядок которой равен nm , т. е. числу узлов в ферромагнитном слое на периоде τ . Коэффициенты уравнений (23) определяются по формулам (24) через матрицы вида

$$v_{jxx} = \frac{\partial H_{jx}}{\partial B_{jx}}, \quad v_{jxy} = \frac{\partial H_{jx}}{\partial B_{jy}}, \quad v_{jyx} = \frac{\partial H_{jy}}{\partial B_{jx}}, \quad v_{jyy} = \frac{\partial H_{jy}}{\partial B_{jy}}. \tag{25}$$

Так как проекции H_{jxk} , H_{jyk} векторов напряженности магнитного поля в каждом из узлов зависят только от проекций B_{jxk} , B_{jyk} вектора магнитной индукции в этом же узле, то матрицы (25) являются диагональными:

$$\begin{aligned}
 v_{jxx} &= \text{diag} \left(\frac{\partial H_{jx1}}{\partial B_{jx1}} \dots \frac{\partial H_{jxm}}{\partial B_{jxm}} \right) = \text{diag} (v_{jxx1}, \dots, v_{jxxm}), \\
 v_{jxy} &= \text{diag} \left(\frac{\partial H_{jx1}}{\partial B_{jy1}} \dots \frac{\partial H_{jxm}}{\partial B_{jym}} \right) = \text{diag} (v_{jxy1}, \dots, v_{jxym}), \\
 v_{jyx} &= \text{diag} \left(\frac{\partial H_{jy1}}{\partial B_{jx1}} \dots \frac{\partial H_{jym}}{\partial B_{jxm}} \right) = \text{diag} (v_{jyx1}, \dots, v_{jyxm}), \\
 v_{jyy} &= \text{diag} \left(\frac{\partial H_{jy1}}{\partial B_{jy1}} \dots \frac{\partial H_{jym}}{\partial B_{jym}} \right) = \text{diag} (v_{jyy1}, \dots, v_{jyy m})
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

$(j = 1, \dots, n),$

где $\nu_{jxxk}, \nu_{jxyk}, \nu_{jyxk}, \nu_{jyyk}$ — элементы тензора дифференциального удельного магнитного сопротивления среды, изображаемого матрицей

$$\nu = \begin{vmatrix} \frac{\partial H_x}{\partial B_x} & \frac{\partial H_x}{\partial B_y} \\ \frac{\partial H_y}{\partial B_x} & \frac{\partial H_y}{\partial B_y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \nu_{xx} & \nu_{xy} \\ \nu_{yx} & \nu_{yy} \end{vmatrix} \quad (27)$$

и вычисляемого по известным для каждого узла значениям B_x, B_y . Для изотропной ферромагнитной среды тензор ν вычисляется по формулам, приведенным в работе [2]. Для анизотропной среды типа шихтового ферромагнетика характеристика намагничивания вида (5) может быть рассчитана по методике, изложенной в работе [1] и представлена таблично. В этом случае элементы тензора ν удобно вычислять для любой заданной совокупности значений $B_x = B_{jxk}, B_y = B_{jyk}$ по той или иной формуле численного дифференцирования.

Систему (23) необходимо проинтегрировать численным способом по h в пределах от 0 до 1. Последовательность операций на шаге интегрирования следующая:

а) по известным из предыдущего шага значениям B_{jxk}, B_{jyk} ($j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m$) (на первом шаге при нулевых значениях) вычисляются тензоры ν_{jk} магнитных сопротивлений, матрицы (26) и с учетом формул (24) формируется матрица коэффициентов системы (23);

б) система (23) решается относительно производных A_j^h ($j = 1, \dots, n$) численным способом (например, по обобщенному алгоритму Гаусса);

в) вычисляются приращения ΔA_j на задаваемом шаге Δh в соответствии с принятым методом численного интегрирования и определяются новые значения векторов A_j ;

г) по формулам (14) — (16) вычисляются векторы B_{jx}, B_{jy} ($j = 1, \dots, n$), являющиеся исходными для последующего шага интегрирования.

Значения векторов B_{jx}, B_{jy} при $h = 1$ определяют искомое магнитное поле. Векторы H_{jx}, H_{jy} в случае необходимости могут быть рассчитаны по найденным векторам B_{jx}, B_{jy} в соответствии с характеристикой намагничивания (5).

По разработанному алгоритму расчета магнитного поля была составлена на языке ФОРТРАН-IV рабочая программа и выполнены расчеты на ЦВМ ЕС-4030. Длительность одного шага интегрирования уравнения системы (23) при числе шагов на полупериоде волны, равном 12, и $n = 30$ составляет 20 с. Число шагов интегрирования в зависимости от уровня насыщения колеблется от одного для ненасыщенной среды и до 50 при глубоких насыщениях. Особенности разработанного алгоритма являются полное отсутствие проблемы сходимости расчетного процесса, свойственной итерационным методам, и применимость его к анизотропным нелинейным средам.

1. Дышовый Р. В., Фильц Р. В., Гаврилюк Р. Б. Расчет магнитной проницаемости и характеристик намагничивания слоистой ферромагнитной среды. — Теорет. электротехника, 1973, вып. 15, с. 141—147.
2. Фильц Р. В., Дышовый Р. В. Безитерационный метод расчета статического вихревого магнитного поля в нелинейной безгистерезисной среде. — Изв. вузов. Электромеханика, 1971, № 9, с. 948—951.
3. Шаманский В. Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. — Киев : Наук. думка, 1966. — 244 с.