

$$\times H(\tau^* - 2k) \Big] + \kappa \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{1n} \left[ \int_0^{\tau} x \frac{\partial}{\partial r_0} I_n(r_0, \tau - x) dx - \right. \\ \left. - \sum_{k=0}^{\infty} (2 - \delta_{k0}) \int_0^{\tau - 2k} \frac{\partial}{\partial r_0} I_n(r_0, \tau - x) dx \right] P_n(\cos \gamma),$$

$$\tau^* = \tau + (-1)^j r_0 - 2j, \quad r_0 = (1 + 2\varepsilon \cos 2\gamma + \varepsilon^2)^{1/2}, \quad \kappa = \frac{a_0 \rho_0}{\rho_0 c^2 r_0},$$

где  $\rho_0$  — плотность среды.

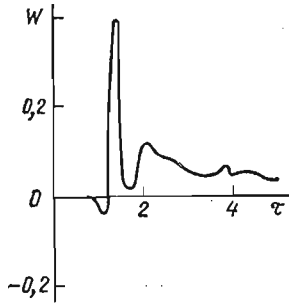


Рис. 2

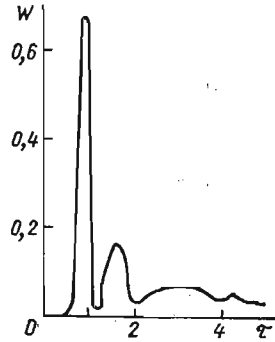


Рис. 3

На рис. 2, 3 приведены графики распределения величины  $W = \frac{\rho_0 c^2}{a_0 \rho_0} \times \omega(1, \gamma)$  в указанных точках в зависимости от времени  $\tau$  для вытянутого сфероида ( $N = 1, \varepsilon = 0, 2$ ), полученные с точностью до трех приближений ( $j = 0, 1, 2$ ). Из этих результатов следует, что часть энергии объемных волн постепенно при повторных отражениях переходит в энергию волн поверхностных. Это явление можно использовать для управления перераспределением энергии источника в нужном направлении.

1. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко И. А. Дифракция упругих волн.— Киев : Наук. думка, 1978.— 307 с.
2. Гузь О. М. Про приближений метод визначення концентрації напружень біля криволінійних отворів в оболонках.— Прикл. механіка, 1962, 8, № 6, с. 605—611.
3. Немши Ю. А. Рекуррентные соотношения метода возмущения в пространственных задачах теории упругости.— Прикл. механіка, 1973, 9, № 9, с. 64—70.
4. Поддубняк А. П., Подстригач Я. С., Грилицкий Д. В. Задача гидроакустики для упругого тела вращения.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 7, с. 3—6.
5. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн.— М. : Мир, 1978.— Т. 1. 547 с.
6. Эхо-сигналы от упругих объектов / У. К. Нигул, Я. М. Метсавээр, Н. Д. Векслер, М. Э. Кутсер.— Таллин : Изд-во АН ЭССР, 1974.— Т. 2.— 346 с.
7. Alterman Z., Kornfeld P. Propagation of a pulse in a fluid sphere.— Geophysics, 1963, 29, N 2, p. 259—287.

Институт прикладных проблем  
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию  
22.02.79

УДК 534.26

А. Н. Горечко

#### ПРИМЕНЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ ЛАГЕРРА К РЕШЕНИЮ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ НА ЦИЛИНДРЕ И СФЕРЕ

Задачи дифракции акустических волн на жестком цилиндре или сфере рассматривались многими авторами. Основным из методов, применяемых при решении этих задач, является метод интегрального преобразования Фурье

или Лапласа по временной переменной, проблема обращения которых даже в этих сравнительно простых задачах наталкивается на определенные трудности. Достаточно полные обзоры исследований этих задач приведены в монографиях [2, 6]. В статье [3] обращение интегрального преобразования Лапласа выполнено путем сведения задачи обращения к решению интегрального уравнения Вольтерра с последующим численным его решением. В настоящей работе для решения нестационарных задач дифракции на жестком цилиндре или сфере предлагается использовать преобразование Лагерра. Это дает возможность представить решение нестационарной задачи в виде ряда по ортогональным полиномам.

Рассмотрим задачу дифракции на жестком неподвижном цилиндре плоской или цилиндрической волны давления, фронт которой параллелен оси цилиндра. Задача сводится, как известно, к решению волнового уравнения на возмущенное давление

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial p}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} \quad (1)$$

при нулевых начальных и граничном условиях

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = - \frac{\partial}{\partial \rho} q(1, \theta, \tau), \quad (2)$$

где  $\theta$  — угловая координата;  $\rho$  и  $\tau$  — безразмерные радиальная и временная координаты;  $q(\rho, \theta, \tau)$  — падающая на цилиндр волна давления; функция  $q$  четная по  $\theta$  и зависит от формы падающей волны и закона изменения давления в ней.

Применение преобразования Лагерра

$$f_n = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\tau} L_n(\tau) d\tau, \quad f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n L_n(\tau) \quad (3)$$

приводит задачу (1), (2) к последовательности неоднородных уравнений Гельмгольца

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial p_n}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 p_n}{\partial \theta^2} - p_n = \sum_{i=0}^{n-1} (n+1-i) p_i, \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial p_n}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = - \frac{\partial}{\partial \rho} q_n(1, \theta) \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Искомое решение, очевидно, является четной функцией по переменной  $\theta$ , следовательно, его можно разложить в ряд Фурье по косинусам. Тогда задача (4) сводится к решению бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dp_{mn}}{d\rho} \right) - \left( 1 + \frac{m^2}{\rho^2} \right) p_{mn} = \sum_{i=0}^{n-1} (n+1-i) p_{mi} \quad (5)$$

$$(m, n = 0, 1, \dots),$$

$$\left. \frac{dp_{mn}}{d\rho} \right|_{\rho=1} = - \frac{d}{d\rho} q_{mn}(1) \quad (m, n = 0, 1, \dots). \quad (6)$$

Решение системы (5) можно провести следующим образом. Общее решение уравнения при  $n = 0$  системы (5) имеет вид

$$p_{m0} = A_{mn}^0 I_m(\rho) + B_{mn}^0 K_m(\rho),$$

где  $I_m(\rho)$  и  $K_m(\rho)$  — модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда соответственно. Используя рекуррентные соотношения для этих функций, можно установить следующее тождество:

$$\left[ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} \right) - \left( 1 + \frac{m^2}{\rho^2} \right) \right] [C\rho^{i+1} I_{m-i-1}(\rho) + D\rho^{i+1} K_{m-i-1}(\rho)] =$$

$$= \frac{1}{2i} [C\rho^i I_{m-i}(\rho) - D\rho^i K_{m-i}(\rho)],$$

которое дает возможность записать общее решение системы (5) в виде

$$\rho_{mn} = \sum_{i=0}^n [A_{mn}^i \rho^i I_{m-i}(\rho) + B_{mn}^i \rho^i K_{m-i}(\rho)]. \quad (7)$$

Так как решение задачи (1), (2) должно быть ограниченным в области  $\rho > 1$ , то постоянные  $A_{mn}^i = 0$  ( $m, n = 0, 1, \dots; i = 0, \dots, n$ ), коэффициенты  $B_{mn}^i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) определяются подстановкой общего решения (7) в систему уравнений (5), а граничные условия (6) служат для определения постоянных  $B_{mn}^i$ . Очевидно, что постоянные  $B_{mn}^i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) можно выразить через  $B_{mk}^0$  ( $k = 0, \dots, n-1$ ), иными словами, независимыми являются лишь постоянные  $B_{mn}^0$ . Исключая зависимые постоянные в решении (7), путем несложных преобразований можно построить решение  $n$ -го уравнения системы (5) в виде

$$\rho_{mn} = \sum_{i=0}^n [D_{m,n-i} G I_{mi}(\rho) + C_{m,n-i} G K_{mi}(\rho)], \quad (8)$$

где

$$G I_{mn}(\rho) = \frac{1}{I_m(1)} L_n \left( -\frac{d}{dx} \right) [\chi^m I_m(\chi \rho)]_{\chi=1} = \frac{1}{I_m(1)} \sum_{i=0}^n \alpha_{ni} \left( \frac{\rho}{2} \right)^i I_{m-i}(\rho);$$

$$G K_{mn}(\rho) = \frac{1}{K_m(1)} L_n \left( -\frac{d}{dx} \right) [\chi^m K_m(\chi \rho)]_{\chi=1} = \frac{1}{K_m(1)} \sum_{i=0}^n \alpha_{ni} \left( -\frac{\rho}{2} \right)^i K_{m-i}(\rho);$$

$$\alpha_{ni} = \frac{1}{i!} \sum_{m=\max(0, 2i-n)}^i \binom{i}{m} \binom{n}{n+m-2i} 2^m;$$

$$L_n \left( -\frac{d}{dx} \right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k}.$$

Из условия ограниченности решения (8) на бесконечности  $D_{mn} = 0$ , а постоянные  $C_{mn}$  являются решениями треугольной системы линейных алгебраических уравнений с разностными коэффициентами следующего вида:

$$\sum_{i=0}^n C_{m,n-i} g_{mi} = q_{mn} \quad (m, n = 0, 1, \dots),$$

где  $g_{mn} = \frac{d}{d\rho} G K_{mn}(1)$ ;  $q_{mn} = -\frac{d}{d\rho} q_{mn}(1)$ .

Решение этой системы представляется с помощью ветвящихся цепных дробей [1]

$$\frac{C_{mn}}{C_{m,n-1}} =$$

$$= a_{n-1,n-1} + \frac{a_{n-1,n-2}}{\frac{C_{m,n-1}}{C_{m,n-2}}} + \frac{a_{n-1,n-3}}{\frac{C_{m,n-1}}{C_{m,n-2}} \frac{C_{m,n-2}}{C_{m,n-3}}} + \dots + \frac{a_{n-1,0}}{\frac{C_{m,n-1}}{C_{m,n-2}} \frac{C_{m,n-2}}{C_{m,0}}},$$

$$a_{nk} = (g_{m,n-k} q_{m,n+1} - g_{m,n-k+1} q_{mn}) / g_{m0} q_{mn},$$

что позволяет избежать накопления ошибки при численном ее решении. На основании преобразования (3) решение исходной задачи (1), (2) записывается в виде двойного ортогонального ряда

$$\rho(\rho, \theta, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [C_{m,n-i} G K_{mi}(\rho)] L_n(\tau) \cos m\theta. \quad (9)$$

Аналогично может быть решена задача дифракции акустической волны на жесткой неподвижной сфере. Применив к задаче

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \frac{\partial \rho}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial^2 \rho}{\partial \tau^2},$$

$$\rho(\rho, \theta, 0) = \frac{\partial}{\partial \tau} \rho(\rho, \theta, 0) = 0; \quad \left. \frac{\partial \rho}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = - \frac{\partial}{\partial \rho} q(1, \theta, \tau) \quad (10)$$

преобразование Лагерра (3) и представив искомое решение в виде ряда по полиномам Лежандра  $P_m(\cos \theta)$ , приходим к бесконечной треугольной системе дифференциальных уравнений, аналогичной системе (5):

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left( \rho^2 \frac{d\rho_{mn}}{d\rho} \right) - \left[ 1 + \frac{m(m+1)}{\rho^2} \right] \rho_{mn} = \sum_{i=0}^{n-1} (n+1-i) \rho_{mi},$$

общее решение которой имеет вид

$$\rho_{mn} = \sum_{j=0}^n [D_{m,n-j} G_{imj}(\rho) + C_{m,n-j} G_{kmj}(\rho)],$$

где

$$G_{kmn}(\rho) = \frac{1}{k_m(1)} L_n \left( - \frac{d}{dx} \right) [\chi^{m+1} k_m(\chi \rho)]_{\chi=1} = \frac{1}{k_m(1)} \sum_{i=0}^n \alpha_{ni} \left( - \frac{\rho}{2} \right)^i k_{m-i}(\rho);$$

$$G_{imn}(\rho) = \frac{1}{i_m(1)} L_n \left( - \frac{d}{dx} \right) [\chi^{m+1} i_m(\chi \rho)]_{\chi=1} = \frac{1}{i_m(1)} \sum_{i=0}^n \alpha_{ni} \left( \frac{\rho}{2} \right)^i i_{m-i}(\rho).$$

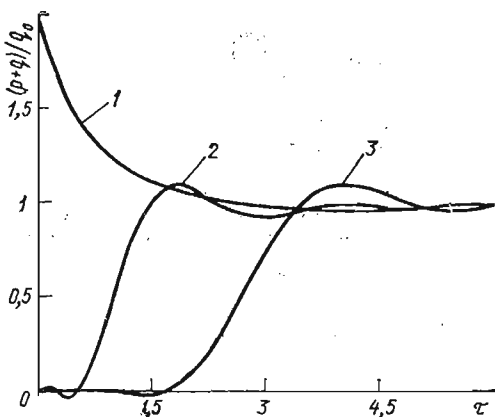


Рис. 1

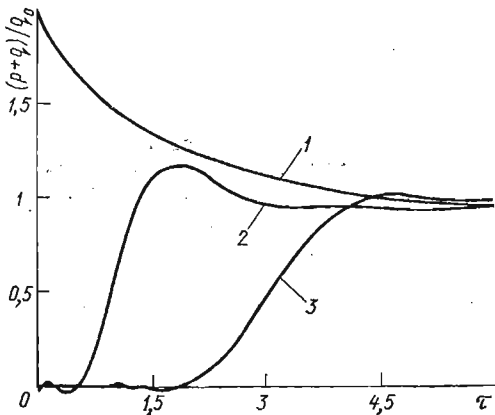


Рис. 2

Здесь  $i_m(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} I_{m+1/2}(\rho)$  и  $k_m(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} K_{m+1/2}(\rho)$  — модифицированные сферические функции Бесселя. Как и в случае цилиндра,  $D_{mn} = 0$ . Определив постоянные  $C_{mn}$  из граничного условия задачи (10), получим ее решение в виде

$$\rho(\rho, \theta, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{i=0}^n C_{m,n-i} G_{kmi}(\rho) \right] \times L_n(\tau) P_m(\cos \theta). \quad (11)$$

В качестве примеров рассмотрим задачи дифракции плоской ступенчатой волны давления на сфере и цилиндре, что соответствует заданию функции  $q(\rho, \theta, \tau)$  в условии (2) и задаче (10) в виде

$$q(\rho, \theta, \tau) = q_0 H(\tau + \rho \cos \theta - 1). \quad (12)$$

На рис. 1, 2 приведены кривые изменения суммарного давления на поверхности сферы и цилиндра соответственно; кривые 1, 2 и 3 соответствуют трем харак-

терным точкам сферы и цилиндра  $\theta = 0, \pi/2$  и  $\pi$ . Суммирование рядов (9) и (11) для уменьшения эффекта Гиббса проводили методом Фейера [4], при расчетах ограничивались одиннадцатью членами ряда по Фурье или Лежандру ( $m \leq 10$ ) и тридцатью одним по Лагерру ( $n \leq 30$ ). Полученные результаты, как следует из графиков, хорошо согласуются с известными [2]. Давление на объекте после прохождения фронта волны устанавливается равным единице, причем оно быстрее падает на сфере в любой из характерных точек. Время приходов импульсов в точках  $\theta = \pi/2$  и  $\pi$  также хорошо согласуется с результатами работы [2] и с выводами геометрической акустики [5]. Однако интересен полученный график поведения суммарного давления на сфере в тени ( $\theta = \pi$ ) (см. рис. 1). В работе [2] эта кривая стремится к единице, не превосходя ее, точно так же, как и в случае дифракции на цилиндре. Известно [5], что на сфере в тени давление растет быстрее, чем в соответствующих точках цилиндра, а в точке  $\theta = \pi$  результаты для сферы и цилиндра сильно отличаются. Объясняется это тем, что в случае дифракции на сфере луч  $\theta = \pi$  является каустикой. Следовательно, кривая 3 на рис. 1 более оправдана как с физической, так и с математической точки зрения.

Отметим, что в случае падения на объект плоской акустической волны, давление в которой изменяется по произвольному отличному от (12) закону, решение может быть получено с помощью интеграла Дюамеля.

1. Боднарчук П. И., Скоробогатько В. Я. Гіллясті ланцюгові дробі та їх застосування.— К.: Наук. думка, 1974.— 271 с.
2. Григолюк Э. И., Горшков А. Г. Нестационарная гидроупругость оболочек.— Л.: Судостроение, 1974.— 208 с.
3. Кубенко В. Д., Панасюк Н. Н. Нестационарная дифракция акустических сферических и цилиндрических волн на жесткой сфере и цилиндре.— Прикл. механика, 1977, 13, № 9, с. 14—20.
4. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа: Справочное руководство.— М.: Физматгиз, 1964.— 524 с.
5. Фридлендер Ф. Звуковые импульсы.— М.: Изд-во иностр. лит., 1962.— 232 с.
6. Эхо-сигналы от упругих объектов / У. К. Нигул, Я. А. Метсавээр, Н. Д. Векслер, М. Э. Кутсер.— Таллин: Изд-во АН ЭССР, 1974.— Т. 2.— 346 с.

Львовский университет

Поступила в редколлегию  
22.06.79

УДК 539.3 : 534.1

О. Ю. Жарий, А. Ф. Улитко

#### ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ РАЗРЯД ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ МЕХАНИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

В современной технике находят широкое применение импульсные (искровые) генераторы энергии, использующие явление электрического разряда деформируемых пьезоэлектрических тел [9]. Напряженность активных элементов такого типа генераторов и эффективность электромеханического преобразования существенно зависят от характера и интенсивности волновых полей, сопровождающих явление электрического разряда. В работах [1—3] изучено поведение пьезокерамического слоя при мгновенном электрическом нагружении и разряде, а также при многократных разрядах, однако общая теория в имеющейся литературе отсутствует. Задачи разряда периодически возбуждаемых механическим или электрическим путем элементов почти не рассматривались.

Цель данной работы — изучение общих закономерностей кратковременного (в течение нескольких наносекунд) электрического разряда пьезоэлектрических тел при произвольных условиях электрического и