

Я. С. Подстригач, Ю. А. Чернуха, Р. С. Шпакович

**УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕРМОУПРУГОГО РАВНОВЕСИЯ
ПОДКРЕПЛЕННЫХ КРУГОВЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН**

Известные в литературе исследования термонапряженного состояния и устойчивости равновесия многослойных пластин и оболочек относятся в основном к случаям, когда на их торцевых поверхностях заданы краевые условия. В настоящей работе исследуется устойчивость термоупругого равновесия трехслойных круговых пластин симметричного строения с легким заполнителем, подкреплённых по контуру стержнем произвольного поперечного сечения.

Основные уравнения термоупругости для таких пластин получены в работе [1]. Запишем их в полярной системе координат в виде, удобном для решения задачи устойчивости (прогибы пластинки считаем малыми):

$$2DV^4w + 2BH\nabla^2\left(\frac{\partial u^-}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v^-}{\partial\varphi} + \frac{u^-}{r}\right) = N_r^0\frac{\partial^2w}{\partial r^2} + \\ + N_\varphi^0\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2w}{\partial\varphi^2}\right) + 2S^0\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2w}{\partial r\partial\varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right) + 2D(1+\mu)\alpha\nabla^2\Theta^+ + \\ + 2BH(1+\mu)\alpha\nabla^2T^-, \quad (1)$$

$$B_0L_1(u^-, v^-) - u^- + H\frac{\partial w}{\partial r} + B_0(1+\mu)\alpha\frac{\partial T^-}{\partial r} = 0,$$

$$B_0L_2(u^-, v^-) - v^- + H\frac{\partial w}{r\partial\varphi} + B_0(1+\mu)\frac{\alpha}{r}\frac{\partial T^-}{\partial\varphi} = 0,$$

$$L_1(u^+, v^+) = (1+\mu)\alpha\frac{\partial T^+}{\partial r}, \quad L_2(u^+, v^+) = (1+\mu)\alpha\frac{\partial T^+}{r\partial\varphi}.$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$L_1(u, v) = \frac{\partial^2u}{\partial r^2} + \frac{1+\mu}{2r}\frac{\partial^2v}{\partial r\partial\varphi} + \frac{1-\mu}{2r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} - \frac{3-\mu}{2r^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi};$$

$$L_2(u, v) = \frac{\partial^2v}{r^2\partial\varphi^2} + \frac{3-\mu}{2r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi} + \frac{1+\mu}{2r}\frac{\partial^2u}{\partial r\partial\varphi} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2v}{\partial r^2} + \\ + \frac{1-\mu}{2r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1-\mu}{2r^2}v; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2};$$

$$H = h_1 + h_2; \quad B(1-\mu^2) = Eh_1; \quad 12D(1-\mu^2) = Eh_1^3, \quad B_0G_3 = Bh_2;$$

$$2Z^+ = Z_1 \pm Z_3; \quad Z^\pm = (u^\pm, v^\pm, T^\pm, \Theta^\pm); \quad Z_i = (u_i, v_i, T_i, \Theta_i).$$

Кроме того, w — прогиб пластинки, $N_{r,\varphi}^0$ — растягивающие усилия в пластинке; u_i, v_i — перемещения срединных поверхностей несущих слоев пластинки в направлениях r и φ ; $2h_2$ и $2h_1$ — толщины заполнителя и несущих слоев соответственно; E, μ, α — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и коэффициент теплового расширения несущих слоев; G_3 — модуль сдвига заполнителя; T_i и Θ_i — усредненная температура и температурный аналог изгибающего момента для температурного поля t_i i -го слоя пластинки ($i = \overline{1, 3}$, слой пронумерованы в направлении положительного значения прогиба w):

$$T_i = \frac{1}{2h_i} \int_{-h_i}^{h_i} t_i d\gamma_i, \quad \Theta_i = \frac{3}{2h_i^2} \int_{-h_i}^{h_i} t_i d\gamma_i.$$

Уравнения для определения характеристик температурного поля многослойной пластинки получены в работе [7].

Условия термомеханического контакта стержня и пластинки. Краевые условия для системы (1) найдем из условий контакта трехслойной пластинки со стержнем*. Площадку контакта будем считать нормальной к срединной поверхности пластинки, а стержень — тонким. Примем для него гипотезу недеформируемых поперечных сечений. Взаимоортogonalную систему координат для стержня выберем следующим образом. Координату s будем отсчитывать вдоль оси стержня, а оси z и x располагаем в его поперечном сечении, причем ось z нормальна к срединной поверхности пластинки. Пусть u_z, v_c, w_c — перемещения оси стержня в направлениях x, s, z , а κ — угол закручивания его оси. Обозначим через x^* и z^* координаты волокна стержня, прилегающего к линии пересечения поверхности контакта со срединной поверхностью пластинки; R — радиус пластинки. Кроме того, пусть $u_\alpha^*, v_\alpha^*, w_\alpha^*, \frac{\partial w^*}{\partial r}$ — значения соответствующих величин на краю пластинки. Тогда из условий идеального механического контакта и гипотезы недеформируемых поперечных сечений стержня следуют такие соотношения:

$$\begin{aligned} \kappa &= -\frac{\partial w^*}{\partial r}, \quad u_c = -u_\alpha^* + z^*\kappa, \quad v_c = v_\alpha^* + z^*\frac{dw^*}{ds} - x^*\left(\frac{du_\alpha^*}{ds} - \frac{v_\alpha^*}{R}\right), \\ w_c &= w^* - x^*\kappa, \quad u_\beta^* - H\frac{\partial w^*}{\partial r} = 0, \quad v_\beta^* - \frac{H}{R}\frac{\partial w^*}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Последние два соотношения представляют собой условия недеформируемости нормалей на краю пластинки.

Запишем известные соотношения между внутренними усилиями и перемещениями стержня [6]:

$$\begin{aligned} M_x &= E_c I_x \left(-\frac{d^2 w_c}{ds^2} + \frac{\kappa}{R} - \alpha_c \Theta_x \delta_x \right), \\ M_z &= E_c I_z \left(\frac{d^2 u_c}{ds^2} + \frac{1}{R} \frac{dv_c}{ds} + \alpha_c \Theta_z \delta_z \right), \\ M_s &= G_c I_s \left(\frac{d\kappa}{ds} + \frac{1}{R} \frac{dw_c}{ds} \right), \quad Q_s = E_c F_c \left(\frac{dv_c}{ds} - \frac{u_c}{R} - \alpha_c T \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь обозначено: \bar{Q} и \bar{M} — главный вектор и главный момент напряжений в поперечном сечении стержня; E_c, G_c, α_c — модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент теплового расширения материала стержня; F_c, I_x, I_z, I_s — площадь и осевые моменты инерции поперечного сечения стержня относительно соответствующих осей; $\delta_x (\delta_z)$ — расстояние от оси x (z) до наиболее удаленной от нее точки поперечного сечения.

В соотношении (3) введены усредненные по области поперечного сечения стержня характеристики его температурного поля t_c :

$$F_c T = \iint_F t_c dF, \quad \Theta_x I_x = \delta_x \iint_F t_c z dF, \quad \Theta_z I_z = \delta_z \iint_F t_c x dF.$$

Уравнения для их определения получены в работе [5].

На стержень действует следующая нагрузка:

$$\begin{aligned} q_x &= N_r + q_x^0, \quad q_z = -Q_r + q_z^0, \quad m_s = -M_r - z^* N_r - x^* Q_r + m_s^0, \\ q_s &= -S + q_s^0, \quad m_x = -M_{кр} + z^* S + m_x^0, \quad m_z = x^* S + m_z^0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $N_r, S, Q_r, M_r, M_{кр}$ — компоненты реактивной нагрузки, передающейся на стержень со стороны пластинки, численно равные и противоположные по знаку нормальному и касательному усилиям, перерезывающей силе,

* В работе [4] рассмотрена силовая задача для трехслойной пластинки, подкрепленной прямым стержнем, причем без учета жесткости стержня на изгиб в плоскости пластинки.

изгибающему и крутящему моментам на краю пластинки; \bar{q}^0, \bar{m}^0 — приложенная к стержню внешняя нагрузка.

Запишем с учетом формул (4) уравнения равновесия элемента стержня:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_x}{ds} + \frac{Q_s}{R} + N_r + q_x^0 &= 0, \quad \frac{dQ_s}{ds} - \frac{Q_x}{R} - S + q_s^0 = 0, \\ \frac{dM_z}{ds} + Q_x + x^*S + m_z^0 &= 0, \quad \frac{dQ_z}{ds} - Q_r + m_s^0 = 0, \\ \frac{dM_s}{ds} - \frac{M_x}{R} - M_r - z^*N_r - x^*Q_r + m_s^0 &= 0, \\ \frac{dM_x}{ds} + \frac{M_s}{R} - Q_z - M_{\text{кр}} - z^*S + m_x^0 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Исключим из этих соотношений величины Q_x и Q_z . Получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2M_z}{ds^2} - \frac{Q_s}{R} + x^* \frac{dS}{ds} - N_r - q_x^0 + \frac{dm_z^0}{ds} &= 0, \\ \frac{dQ_s}{ds} + \frac{1}{R} \frac{dM_z}{ds} + \left(\frac{x^*}{R} - 1 \right) S + q_s^0 + \frac{m_z^0}{R} &= 0, \\ \frac{d^2M_x}{ds^2} + \frac{dM_s}{Rds} - z^* \frac{dS}{ds} - \frac{dM_{\text{кр}}}{ds} - Q_r + q_z^0 + \frac{dm_x^0}{ds} &= 0, \\ \frac{dM_s}{ds} - \frac{M_x}{R} - M_r - z^*N_r - x^*Q_r + m_s^0 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнения (1) — (3) и (5), а также известные соотношения между внутренними усилиями и перемещениями пластинки [1] и соответствующие условия в центре (в случае сплошной пластинки) полностью определяют термонапряженное состояние стержня и пластинки. Если усилия в стержне с помощью соотношений (2), (3) выразить через перемещения края пластинки и подставить их в уравнения (6), то полученные соотношения вместе с последними двумя условиями (2) будут краевыми условиями в перемещениях для системы (1).

Отметим, что в литературе компоненты нагрузки q_z, m_s, m_x обычно записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} q_z &= -Q_r - \frac{dM_{\text{кр}}}{ds} + q_z^0, \quad m_x = -z^*S + m_x^0, \\ m_s &= -M_r - z^*N_r - x^* \left(Q_r + \frac{dM_{\text{кр}}}{ds} \right) + m_s^0, \end{aligned}$$

т. е. считается, что со стороны пластинки на стержень действуют не перерезывающая сила и крутящий момент, а только обобщенная (по Кирхгофу) перерезывающая сила. Это может привести в некоторых случаях к ошибочным результатам.

Приведение задачи устойчивости к интегральным уравнениям. В работе [3] задача об устойчивости упругого равновесия однородной круговой пластинки сводится к интегральному уравнению Фредгольма II рода. Приближенные методы решения и нахождения собственных значений таких интегральных уравнений достаточно хорошо разработаны в математической литературе. Ниже подход, предложенный в работе [3], распространяется на случай температурной задачи для трехслойной подкрепленной пластинки.

Рассмотрим нагрев, нагружение и условия закрепления подкрепленной пластинки, которые приводят к осесимметричному температурному полю и докритическому напряженному состоянию. При заданном нагреве подкрепленной пластинки в ней возникнут мембранные усилия $N_r^0(r)$ и $N_\phi^0(r)$. Они определяются из двух последних уравнений (1) и первых двух усло-

вий (6). Пусть

$$N_r^0 = \lambda n_r^0, \quad N_\varphi^0 = \lambda n_\varphi^0,$$

а n_r^0 и n_φ^0 назовем единичными мембранными усилиями для данного распределения температуры.

Представим u_β , v_β , w в таком виде:

$$u_\beta = \sum_n u_n(r) \cos n\varphi, \quad v_\beta = \sum_n v_n(r) \sin n\varphi, \quad w = \sum_n w_n(r) \cos n\varphi. \quad (7)$$

Для случая $n \neq 0$ вводим новые неизвестные функции F_n и Ψ_n :

$$u_n = H \left(\frac{df_n}{dr} + \frac{n}{r} \Psi_n \right), \quad v_n = \left(\frac{n}{r} F_n + \frac{d\Psi_n}{dr} \right), \quad w = (1 - B_0 \nabla^2) F_n.$$

Подставив эти выражения в уравнения (1), для функции Ψ_n и F_n получим следующие уравнения:

$$\left(\frac{1-\mu}{2} B_0 \nabla_n^2 - 1 \right) \Psi_n = 0, \quad L_n(F_n) = \lambda A_n(F_n, n^0). \quad (8)$$

Здесь введены обозначения:

$$L_n = 2 (B_0 D \nabla_n^2 - D - B H^2) \nabla_n^4; \quad \nabla_n^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2};$$

$$\lambda A_n(F_n, n^0) = \left[N_\varphi^0 B_0 \nabla_n^4 - N_\varphi^0 \nabla_n^2 - (N_r^0 - N_\varphi^0) \left(\frac{d^2}{dr^2} - B_0 \frac{d^2}{dr^2} \nabla_n^2 \right) \right] F_n.$$

Аналогично преобразовываем последние два условия (2) и условия (6).

Решив первое уравнение (8), найдем Ψ_n . Подставив найденное решение Ψ_n в преобразованные краевые условия (2) и (6) и исключив постоянные интегрирования, входящие в решение Ψ_n , получим шесть краевых условий на функцию F_n . Для второго уравнения (8) при этих краевых условиях построим функцию Грина $\Gamma_n(r, \xi)$.

Вводим новую функцию $v_n(r)$ [3] так:

$$F_n(r) = \int_{R_0}^{R_1} \Gamma_n(r, \xi) v_n(\xi) d\xi, \quad (9)$$

где R_0 и R_1 — соответственно внутренний и внешний радиусы пластинки. Подставив соотношение (9) во второе уравнение (8), получим

$$v_n(r) - \lambda \int_{R_0}^{R_1} A_n[\Gamma_n(r, \xi), n^0(r)] v_n(\xi) d\xi = 0. \quad (10)$$

Случай $n = 0$ (осесимметричного выпучивания) требует отдельного рассмотрения. Неизвестную функцию F_0 вводим следующим образом:

$$u_0 = H \frac{dF_0}{dr}, \quad w_0 = (1 - B_0 \nabla_0^2) F_0 - B_0 (1 + \mu) \frac{\alpha}{H} T^-. \quad (11)$$

Подставив эти выражения для u_0 и w_0 в уравнения (1), получим

$$L_0(F_0) = \lambda A_0(F_0, n^0) + A_{01}(T^-, N^0) + A_{02}(T^-), \quad (12)$$

$$A_{01}(T^-, N^0) = -N_\varphi^0 B_0 \frac{\alpha(1+\mu)}{H} \nabla_0^2 T^- - (N_r^0 - N_\varphi^0) B \frac{\alpha(1+\mu)}{H} \frac{d^2 T^-}{dr^2},$$

$$A_{02}(T^-) = 2\alpha(1+\mu) \nabla_0^2 \left(\frac{B_0 D}{H} \nabla_0^2 T^- + B H T^- + D \Theta^+ \right).$$

Аналогично преобразовываем соответствующие условия (1), (6). Для уравнения (12) и полученных краевых условий построим функцию Грина $\Gamma_0(r, \xi)$. Функцию $v_0(r)$ вводим следующим образом:

$$F_0(r) = \int_{R_0}^{R_1} \Gamma_0(r, \xi) v_0(\xi) d\xi + \sum_{i=0}^6 c_i y_i. \quad (13)$$

Здесь y_i — фундаментальные решения уравнения $L_0(F_0) = 0$;

постоянные c_i определяются при указанном выше построении функции Грина, как показано в работе [2].

Подставив выражение (13) в (12), найдем

$$\begin{aligned} v_0(r) - \lambda \int_{R_0}^{R_1} A_0[\Gamma_0(r, \xi), n^0(r)] v_0(\xi) d\xi = \\ = A_0 \left(\sum_{i=1}^6 c_i y_i, N^0(r) \right) + A_{01}(T^-, N^0) + A_{02}(T^-). \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнения (10), (14) являются интегральными уравнениями Фредгольма II рода. Таким образом, задача на определение критического значения параметра температуры свелась к задаче на собственные значения для интегральных уравнений (10), (14).

П р и м е р. Рассмотрим подкрепленную круговую пластинку радиуса R , которая находится в постоянном температурном поле; ось подкрепляющего стержня лежит в плоскости срединной поверхности пластинки. Стержень закреплен так, что его волокно, контактирующее со срединной поверхностью пластинки, ограничено от перемещений в направлении оси z . К стержню не приложена активная внешняя нагрузка, т. е. $q_x^0 = q_s^0 = m_z^0 = m_x^0 = 0$. Кроме контактных усилий со стороны пластинки на стержень будут действовать только неизвестные пока опорная реакция q_z^0 и обусловленный этой реакцией момент $m_s^0 = x^* q_z^0$.

Таким образом, для определения опорной реакции q_z^0 и постоянных интегрирования, содержащихся в решении системы (1), имеем последние два условия (2), условия (6) и условие $w^* = 0$. Реакцию q_z^0 найдем из третьего условия (6). Итак, крайевыми условиями для уравнений (1) будут последние два условия (2), первые два условия (6), а также условия

$$w^* = -x^* \frac{d^2 M_x}{ds^2} + \left(1 - \frac{x^*}{R}\right) \frac{dM_s}{ds} - \frac{M_x}{R} + x^* \frac{dM_{кр}}{ds} - M_r = 0. \quad (15)$$

Систему (1) вместе с указанными крайевыми условиями приводим, как описано выше, к интегральным уравнениям (10), (14). Ядро интегрального уравнения (14) в рассматриваемом случае имеет вид

$$A_0(\Gamma_0, n^0) = A'_0(\Gamma_0, n^0) [2W_0(\xi) \Delta]^{-1}.$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned} A'_0(\Gamma_0, n^0) &= n^0 |b_{ij}| \quad (i, j = \overline{1,7}); \\ W_0(\xi) &= |a_{ij}|; \quad \Delta = |d_{ij}|; \quad b_{+1,i+1} = d_{ij}; \\ b_{11} &= \text{sgn}(\rho - \xi) |c_{ij}^1|; \quad b_{k+1,1} = |c_{ij}^{k+1}|; \\ a_{i5} &= I_0^{(i-1)}(k_1 \xi); \quad a_{i6} = K_0^{(i-1)}(k_1 \xi) \quad (i, j, k = \overline{1,6}); \\ c_{ij}^k &= a_{ij}; \quad c_{6j}^k = \text{sgn}(4, 1 - k) b_{k,j+1} \quad (i = \overline{1,5}, j = \overline{1,6}, k = \overline{1,7}); \\ a_{i+2,4} &= 2a_{i2} \quad (i = \overline{2,4}); \quad a_{11} = 1; \quad a_{12} = \ln \xi; \quad a_{22} = \frac{1}{\xi}; \\ a_{32} &= -\frac{1}{\xi^2}; \quad a_{42} = 2\xi^{-3}; \quad a_{52} = -6\xi^{-4}; \quad a_{62} = 24\xi^{-5}; \\ a_{14} &= 3 + 2 \ln \xi; \quad a_{13} = \xi^2; \quad a_{23} = 2\xi; \quad a_{33} = 2; \\ \frac{d_{14}}{4} &= \frac{d_{15}}{k_1^2 I_0'(k_1)} = \frac{d_{16}}{k_1^2 K_0'(k_1)} = -\frac{B^* I_0'(k)}{I_0(k)}; \\ d_{24} &= d_{54} = d_{64} = -4B^*; \quad d_{25} = B_k I_0(k_1); \quad d_{26} = B_k K_0(k_1); \\ d_{21} &= d_{42} = -d_{46} = d_{52}/2 = d_{62} = 1; \quad d_{32} = -(1 - \mu)(\gamma_1 + \gamma_2) - E^*; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{23} &= 1 - 4B_0^*; \quad d_{33} = 2(1 + \mu)(\gamma_1 + \gamma_2) - 2E^*; \quad d_{66} = -d_{56}/2 = B_k; \\
 d_{34} &= (\gamma_1 + \gamma_2)(3 + \mu) + 4(1 - \mu)B^*\gamma_1 - (1 - 4B^*)E^*; \\
 d_{35} &= (\gamma_1 B_k + \gamma_2)[k_1^2 I_0(k_1) - (1 - \mu)I_0'(k_1)] - E^* B_k I_0'(k_1); \\
 d_{36} &= (\gamma_1 B_k + \gamma_2)[k_1^2 K_0(k_1) - (1 - \mu)K_0'(k_1)] - E^* B_k K_0'(k_1); \\
 b_{14} &= -4; \quad b_{15} = -4(1 + \ln \rho); \quad b_{16} = k_1^2 B_k I_0(k_1 \rho); \quad b_{17} = k_1^2 B_k K_0(k_1 \rho).
 \end{aligned}$$

Остальные элементы всех определителей равны нулю. Кроме того,

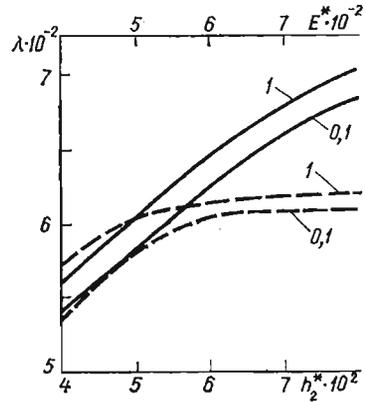
$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= \frac{2D}{R^2 n^0}, \quad \gamma_2 = \frac{2BH^2}{R^2 n_0}, \\
 \frac{r}{R} &= \rho, \quad E^* = \frac{E_c J_x}{n^0 R^3}, \quad B^* = \frac{B_0}{R^2}, \\
 B_k &= 1 - B^* k_1^2, \quad k_1^2 = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 B^*}, \\
 k^2 &= \frac{2}{B^*(1 - \mu)},
 \end{aligned}$$

$K_0^{(i)}$ и $I_0^{(i)}$ — i -е производные по ρ от функций Бесселя в точке $\rho = 1$.

Для определения собственных значений интегральных уравнений (10), (14) приводим их к системам линейных алгебраических уравнений путем замены интегралов конечными суммами. Вычисления произведены на ЭВМ «Минск-32». Критическое значение температуры нагрева t_n находим по вычисленному наименьшему собственному значению из соотношения

$$\lambda n_r^\nu = \frac{2B(1 + \mu) E_c F_c}{2BR(1 + \mu) + E_c F_c} (\alpha_c - \alpha) t_n.$$

На рисунке представлена зависимость критического параметра λ от толщины заполнителя $h_2 = h_2^* R$ при $\gamma_1 = 0,1$; 1 и $E^* = 500$ (сплошные линии) и от жесткости на изгиб из плоскости подкрепляющего стержня при тех же значениях γ_1 и $h_2^* = 0,05$ (штриховые). Из рисунка видно, что начиная с $E^* = 600$ значение λ почти не изменяется, т. е. подкрепляющий стержень становится эквивалентным жесткому защемлению контура пластинок. Для других безразмерных параметров приняты следующие значения: $\tau_2 = 1,8 \cdot 10^5 (h_2^* + 0,005)^2$, $B^* = 14 h_2^*$.



1. Григолюк Э. И. Уравнения трехслойных оболочек с легким заполнителем.— Изв. АН СССР. ОТН, 1957, № 1, с. 77—84.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: Наука, 1971.— 576 с.
3. Каюк Я. Ф., Борота Ф. П., Шаталов В. И. Про стійкість кільцевих пластин під дією стискуючих зусиль змінної інтенсивності.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1977, № 3, с. 235—239.
4. Кириченко В. Л. Устойчивость трехслойной пластины с подкрепленным краем.— Изв. вузов. Стр.-во и архитектура, 1974, № 7, с. 45—49.
5. Подстригац Я. С., Чернуха Ю. А. Условия теплообмена на подкрепленном крае многослойной оболочки.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1977, вып. 6, с. 7—9.
6. Подстригац Я. С., Чернуха Ю. А., Войтович Н. И. К определению температурных полей и напряжений в оболочках, сопряженных через стержень.— В кн.: Математические методы в термомеханике. Киев: Наук. думка, 1978, с. 3—11.
7. Чернуха Ю. А. Задача теплопроводности для облучаемых многослойных оболочек.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 1, с. 104—109.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
22.10.79