УДК 517.946 : 534

И. П. Смерека

ПОСТРОЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПОМОЩЬЮ СПЕЦИАЛЬНЫХ Ateb-ФУНКЦИЙ

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)^{\varkappa_1}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^{\varkappa_2} - \gamma^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)^{\varkappa_3}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^{\varkappa_4} = 0, \tag{1}$$

где $\varkappa_1 \neq 0$, $\varkappa_3 \neq 0$, а $\frac{\varkappa_3+\varkappa_4}{\varkappa_1}$, $\frac{\varkappa_1}{\varkappa_1+\varkappa_2}$, $\frac{\varkappa_1+\varkappa_2}{\varkappa_3}$, $\frac{\varkappa_3}{\varkappa_3+\varkappa_4}$ имеют вид

$$\frac{2k_1+1}{2k_2+1}\,(k_1, k_2 = 0, 1, 2\ldots),$$

являющееся обобщением уравнений, встречающихся при изучении распространения волн в нелинейных сплошных средах, существование периодических решений для которых доказано в работе [3]. Используя специальные Ateb-функции [2], построим периодическое по двум переменным решение этого уравнения. Ищем его в виде

$$U(t, x) = T(t)\,X(x). \tag{2}$$

Тогда функции $T(t)$ и $X(x)$ должны удовлетворять уравнениям

$$\left(\frac{d^2T}{dt^2}\right)^{\varkappa_1}\left(\frac{dT}{dt}\right)^{\varkappa_2} + \lambda^2 T^{\varkappa_3+\varkappa_4} = 0, \tag{3}$$

$$\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^{\varkappa_3}\left(\frac{dX}{dx}\right)^{\varkappa_4} + \frac{\lambda^2}{\gamma^2}X^{\varkappa_1+\varkappa_2} = 0. \tag{4}$$

Здесь λ — произвольная постоянная, метод определения которой указан ниже.

Решение уравнения (3) представим в виде

$$T(t) = T_0\,\mathrm{sa}\,[n, m, w(t)], \tag{5}$$

где T_0 — произвольная постоянная; sa $[n, m, w]$ — синус Ateb-функция; $w(t)$ — подлежащая определению функция времени.

Подставив выражение (5) в (3) и использовав при этом свойства Ateb-функций [2], после некоторых преобразований получим, что решение (5) удовлетворяет дифференциальному уравнению (3) при

$$n = \frac{\varkappa_3+\varkappa_4}{\varkappa_1},\quad m = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_1+\varkappa_2},\quad w(t) = \omega t + \varphi, \tag{6}$$

где

$$\omega^{2\varkappa_1+\varkappa_2} = \frac{\lambda^2\left[(\varkappa_1+\varkappa_3+\varkappa_4)(2\varkappa_1+\varkappa_2)\right]^{\varkappa_1}(\varkappa_3+\varkappa_4)^{\varkappa_2}}{2^{2+\varkappa_2}\varkappa_1^{2\varkappa_1+\varkappa_2}}\,T_0^{\varkappa_3+\varkappa_4-\varkappa_1-\varkappa_2}, \tag{7}$$

$$\varphi = \mathrm{const}.$$

Таким образом, решение уравнения (3) имеет вид

$$T(t) = T_0\,\mathrm{sa}\left(\frac{\varkappa_3+\varkappa_4}{\varkappa_1}, \frac{\varkappa_1}{\varkappa_1+\varkappa_2}, \omega t+\varphi\right). \tag{8}$$

Аналогично находим решение уравнения (4):

$$X(x) = X_0\,\mathrm{sa}\left(\frac{\varkappa_1+\varkappa_2}{\varkappa_3}, \frac{\varkappa_3}{\varkappa_3+\varkappa_4}, \nu x+\delta\right). \tag{9}$$

Здесь

$$\nu^{2\varkappa_3+\varkappa_4} = \frac{\lambda^2\left[(\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3)(2\varkappa_3+\varkappa_4)\right]^{\varkappa_3}(\varkappa_1+\varkappa_2)^{\varkappa_4}}{\gamma^2 2^{2+\varkappa_4}\varkappa_3^{2\varkappa_3+\varkappa_4}}\,X_0^{\varkappa_1+\varkappa_2-\varkappa_3-\varkappa_4}; \tag{10}$$

X_0, δ — произвольные постоянные. Учитывая равенства (8), (9), решение уравнения (1) окончательно записываем так:

$$U(t,x) = T_0X_0\,\mathrm{sa}\left(\frac{\varkappa_3+\varkappa_4}{\varkappa_1}, \frac{\varkappa_1}{\varkappa_1+\varkappa_2}, \omega t+\varphi\right)\times$$
$$\times\,\mathrm{sa}\left(\frac{\varkappa_1+\varkappa_2}{\varkappa_3}, \frac{\varkappa_3}{\varkappa_3+\varkappa_4}, \nu x+\delta\right). \tag{11}$$

Решение (11) в силу периодичности Ateb-функций является периодическим по переменным t и x соответственно с периодами

$$T_1 = \frac{2B\left(\frac{\varkappa_1+\varkappa_2}{2\varkappa_1+\varkappa_2}, \frac{\varkappa_1}{\varkappa_1+\varkappa_3+\varkappa_4}\right)}{\omega}, \tag{12}$$

$$T_2 = \frac{2B\left(\frac{\varkappa_3+\varkappa_4}{2\varkappa_3+\varkappa_4}, \frac{\varkappa_3}{\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3}\right)}{\nu},$$

где $B(p, q)$ — полная бета-функция. Произвольные постоянные λ, T_0, X_0, φ, δ, входящие в решение (11), определяются исходя из конкретных условий рассматриваемой задачи.

В качестве приложения полученных результатов рассмотрим вопрос о возможности появления стоячей волны в стержне с нелинейным законом упругости. Как известно [1], продольное движение деформируемого однородного стержня описывается уравнением

$$\rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial\sigma}{\partial x}. \tag{13}$$

Здесь $U(t, x)$ — продольное смещение произвольного сечения стержня; ρ — плотность материала стержня; σ — напряжение. Предположим, что в рассматриваемом стержне связь между напряжением и деформацией $\varepsilon = \frac{\partial U}{\partial x}$ подчинена нелинейной зависимости

$$\sigma = E\varepsilon^k, \tag{14}$$

где E — модуль упругости; $k = \frac{2k_1+1}{2k_2+1}$ $(k_1, k_2 = 0, 1, 2, \ldots)$.

Подставляя равенство (14) в (13), приходим к дифференциальному уравнению, описывающему продольное движение рассматриваемого стержня:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \gamma^2\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^{k-1}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \tag{15}$$

где $\gamma^2 = \frac{Ek}{\rho}$. Уравнение (15) является частным случаем уравнения (1) и, как было показано выше, для него существует периодическое по переменным t и x решение вида (11), а именно:

$$U(t,x) = T_0X_0\,\mathrm{sa}(k, 1, \omega t+\varphi)\,\mathrm{sa}\left(1, \frac{1}{k}, \nu x+\delta\right). \tag{16}$$

Здесь

$$\omega^2 = \frac{k+1}{2}\lambda^2 T_0^{k-1};\quad \nu^{k+1} = \frac{k+1}{2}\frac{\lambda^2}{\gamma^2}X_0^{1-k}.$$

Предположим, что один конец $x = 0$ рассматриваемого стержня жестко закреплен, а другой $x = l$ свободен. В этом случае граничные условия рассматриваемой задачи выражаются равенствами

$$U\Big|_{x=0} = 0,\quad \frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0. \tag{17}$$

Подчиняя решение (16) граничным условиям (17), находим $\delta = 0$ и

$$\mathrm{ca}\left(\frac{1}{k}, 1, \nu l\right) = 0, \tag{18}$$

где $\operatorname{ca}(m, n, w)$ — косинус Ateb-функция. Уравнение (18) определяет собственные частоты колебаний стержня и по аналогии с линейной теорией называется характеристическим или уравнением частот. Решая его, находим собственные частоты колебаний стержня:

$$\nu_i = \frac{2i-1}{2l} B\left(\frac{k}{k+1}, \frac{1}{2}\right) (i = 1, 2, \ldots). \tag{19}$$

Стоячая волна при $i = 1$ определяет основную форму колебаний стержня, а при $i > 1$ высшие формы его колебаний. Из формулы (10) находим величину λ^2, которая для рассматриваемого примера будет такой:

$$\lambda^2 = \frac{2}{k+1} \nu^{k+1} \gamma^2 X_0^{k-1}. \tag{20}$$

Далее, из выражения (7) с учетом (19), (20) находим

$$\omega^2 = A^{k-1}\gamma^2 \left[\frac{2i-1}{2l} B\left(\frac{k}{k+1}, \frac{1}{2}\right)\right]^{k+1}, \tag{21}$$

где $A = T_0 X_0$ представляет собой величину амплитуды в пучностях стоячих волн. Не ограничивая общности, можно считать, что начало отсчета времени выбрано так, что $\varphi = 0$. Таким образом, с учетом сделанных замечаний получаем, что стоячая волна в рассматриваемом примере имеет вид

$$U(t, x) = A \operatorname{sa}(k, 1, \omega t) \operatorname{sa}\left(1, \frac{1}{k}, \nu x\right). \tag{22}$$

Пусть известна величина амплитуды A в пучностях рассматриваемых стоячих волн. Тогда для любого фиксированного i, т. е. для любой формы колебаний, можно найти стоячую волну и ее периоды по переменным t и x, которые на основании формул (12) запишутся так:

$$T_1 = A^{\frac{1-k}{2}} \frac{2}{\gamma} \left(\frac{2l}{2i-1}\right)^{\frac{k+1}{2}} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{k}{k+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{k+1}\right)}\right]^{\frac{k+1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{k+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{k+1}\right)}, \tag{23}$$

$$T_2 = \frac{4l}{2i-1}.$$

Здесь $\Gamma(p)$ — гамма-функция. Найденные величины периодов стоячих волн по переменным t и x полностью согласуются с аналогичными результатами, полученными в работе [3].

Таким образом, по известным длине стержня, граничным условиям и амплитуде колебаний можно определить набор частот, на которых в рассматриваемом нелинейно-упругом стержне возникают стоячие волны, а также их периоды.

1. *Каудерер Г.* Нелинейная механика.— М. : Изд-во иностр. лит., 1961.— 777 с.
2. *Сеник П. М.* Про Ateb-функції.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1968, № 1, с. 23—27.
3. *Филимонов А. М.* Периодические решения некоторых нелинейных уравнений с частными производными.— Дифференц. уравнения, 1976, **12**, № 11, с. 2077—2084.

Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию 21.12.78