3. Lapidus L., Seinfeld J. Numerical solution of ordinary differential equations.— New York : Acad. press, 1971.— 299 p.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 12.11.79

УДК 517.972.7

Р. Я. Мацюк

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЛАГРАНЖИАНА ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе [1] приведено необходимое и достаточное условие того, что некоторая автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений является системой Эйлера — Пуассона, т. е. определяет экстремали функционала $\int L\left(x^i(\tau), \frac{dx^i}{d\tau}(\tau), \ldots, \frac{d^r x^i}{d\tau^r}(\tau)\right) d\tau$ при некотором выборе лагранжиана L. Пусть U обозначает открытое множество в R^N с координатами x^i. Пространство 1^r-скоростей T^rU с координатами $x^{(0)i} \equiv x^i$, $x^{(1)i}$, ..., $x^{(r)i}$ изоморфно $U \times R^N \times \ldots$ (r раз) $\times \ldots R^N$. Ниже все отображения, функции и дифференциальные формы считаются класса C^∞. Если I — открытое связное множество в R, содержащее нуль, то отображение σ: $I \to U$, называемое кривой в U, определяет элемент $\bar\sigma$ из T^rU по формулам $x^i(\bar\sigma) = \sigma^i(0)$, $x^{(1)i}(\bar\sigma) = \frac{d\sigma^i}{d\tau}(0)$, ..., $x^{(r)i}(\bar\sigma) = \frac{d^r\sigma^i}{d\tau^r}(0)$, где $\sigma^i = x^i\sigma$. Любая система функций λ_j на T^rU определяет автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка r, решения которой суть кривые $\sigma(\tau)$ в U, для которых $\lambda_j\left(\sigma^i(\tau), \frac{d\sigma^i}{d\tau}(\tau), \ldots, \frac{d^r\sigma^i}{d\tau^r}(\tau)\right) = 0$. Основной результат состоит в следующем.

Теорема. Система дифференциальных уравнений $\lambda_j(x^i, x^{(g)i}, \ldots, x^{(r)i}) = 0$ ($j = 1, \ldots, N$) является системой уравнений Эйлера — Пуассона в том и только том случае, если

$$\partial_{0j}\lambda_i - \partial_{0i}\lambda_j - \Sigma_{s=0}^{r}(-1)^s \frac{d^s}{d\tau^s}(\partial_{si}\lambda_j - \partial_{sj}\lambda_i) = 0,$$

$$\partial_{vj}\lambda_i - \Sigma_{s=v}^{r}(-1)^s \frac{s!}{(s-v)!\,v!}\frac{d^{s-v}}{d\tau^{s-v}}\partial_{si}\lambda_j = 0$$

для $1 \leqslant v \leqslant r$. Здесь d_{si} обозначает частную производную по $x^{(s)i}$.

Пусть Φ^r обозначает алгебру внешних дифференциальных форм на пространстве T^rU (число r назовем порядком формы); α, β, γ — произвольные такие формы произвольных порядков и f — любая функция на T^rU. Ясно, что $\Phi^r \subset \Phi^s$ при любых $r \leqslant s$. Пусть действуют следующие операторы: 1) дифференцирование d_T из Φ^r в Φ^{r+1}, определяемое соотношениями

$$d_T d = d d_T,$$

$$d_T(\alpha \wedge \beta) = d_T\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge d_T\beta,$$

$$d_T f = \Sigma_{k=0}^{r} x^{(k+1)i}\partial_{ki} f;$$

2) дифференцирование i_{F_m} из Φ^r в Φ^r, определяемое при каждом неотрицательном целом m соотношениями

$$i_{F_m} f = 0,$$

$$i_{F_m} dx^{(k)i} = \frac{k!}{(k-m)!}\, dx^{(k-m)\, i}, \text{ если } m \leqslant k,$$

$$i_{F_m} dx^{(k)i} = 0, \text{ если } m > k;$$

3) дифференциал Лагранжа δ: $\Phi' \to \Phi^{2'}$, определяемый формулой

$$\delta = \Sigma'_{m=0} \frac{(-1)^m}{m!} d_T^m i_{F_m} d.$$

Определение [1]. Формой Эйлера — Пуассона называется 1-форма $\lambda \in \Phi'$ такая, что $\delta\lambda = 0$ и $i_{F_1}\lambda = 0$.

Предложение [1]. Форма λ является формой Эйлера — Пуассона тогда и только тогда, когда существует функция L такая, что $\lambda = \delta L$.

Следствие. Система уравнений $\lambda_j = 0$ является системой уравнений Эйлера — Пуассона тогда и только тогда, когда построенная по ней 1-форма $\lambda = \lambda_j dx^j$ есть форма Эйлера—Пуассона.

Доказательство состоит в сравнении определяющего выражения для дифференциала Лагранжа δ с известными выражениями Эйлера — Пуассона.

Поскольку для 1-формы $\lambda \in \Phi'$ равенство $i_{F_1}\lambda = 0$ выполняется в том и только том случае, когда $\lambda = \lambda_i dx^i$, доказательство теоремы согласно определению сводится к записи условия $\delta\lambda = 0$ в координатной форме. Пусть i, j принадлежат множеству $\{1, \ldots, N\}$, остальные индексы целые неотрицательные. Имеем

$$d\lambda = \Sigma'_{p=0} \partial_{pj} \lambda_i dx^{(p)j} \wedge dx^i,$$

$$i_{F_0} d\lambda = 2 d\lambda$$

и при $r \geqslant m \geqslant 1$

$$i_{F_m} d\lambda = \Sigma'_{p=m} \frac{p!}{(p-m)!} \partial_{pj} \lambda_i dx^{(p-m)j} \wedge dx^i.$$

Так как для произвольных форм α, β, γ

$$d_T^m (\alpha \wedge \beta \wedge \gamma) = \Sigma_{k+l+n=m} \frac{m!}{k!\, l!\, n!} d_T^k \alpha \wedge d_T^l \beta \wedge d_T^n \gamma,$$

то

$$d_T^m \partial_{pj} \lambda_i dx^{(p-m)j} \wedge dx^i = \Sigma_{k+l+n=m} \frac{m!}{k!\, l!\, n!} d_T^k \partial_{pj} \lambda_i dx^{(p-m+l)j} \wedge dx^{(n)i},$$

и

$$\delta\lambda = d\lambda + \Sigma'_{m=0} \Sigma'_{p=m} (-1)^m \frac{p!}{(p-m)!} \Sigma_{k+l+n=m} \frac{1}{k!\, l!\, n!} d_T^k \partial_{pj} \lambda_i dx^{(p-m+l)j} \wedge dx^{(n)i}.$$

В индексах и соответственно в пределах суммирования делаем замены: $p - m = q$, $q + l = u$, после чего получаем

$$\delta\lambda = d\lambda + \Sigma'_{m=0} \Sigma_{q=0}^{r-m} (-1)^m \frac{(m+q)!}{q!} \Sigma_{k+u+n=m+q} \frac{1}{k!\,(u-q)!\, n!} \times$$

$$\times\, d_T^k \partial_{(q+m)j} \lambda_i dx^{(u)j} \wedge dx^{(n)i},$$

где индексы u и q связаны уравнением $u - q \geqslant 0$. Символы суммирований преобразуем следующим образом:

$$\Sigma'_{m=0} \Sigma_{q=0}^{r-m} = \Sigma'_{s=0} \Sigma_{q+m=s},$$

$$\Sigma_{k+u+n=m+q} = \Sigma_{v=0}^{s} \Sigma_{u+n=v},$$

а в выражении для $\delta\lambda$ везде вместо k ставим просто $s - v$:

$$\delta\lambda = d\lambda + \Sigma'_{s=0} \Sigma_{q+m=s} (-1)^m \frac{s!}{q!} \Sigma_{v=0}^{s} \Sigma_{u+n=v} \frac{1}{(s-v)!\,(u-q)!\, n!} \times$$

$$\times\, d_T^{(s-v)} \partial_{sj} \lambda_i dx^{(u)j} \wedge dx^{(n)i}.$$

Последнее суммирование фактически производится только по u при условии, что вместо n везде подставлено $v-u$:

$$\delta\lambda = d\lambda + \Sigma'_{s=0}\Sigma_{q+m=s}\Sigma^{s}_{v=0}\Sigma^{v}_{u=0}\frac{1}{(s-v)!\,(v-u)!\,u!q!\,(u-q)!}\times$$
$$\times\, d_T^{s-v}\partial_{sj}\lambda_i dx^{(u)j}\wedge dx^{(v-u)i}.$$

Суммирование по q и m можно выполнить в первую очередь, при этом q изменяется в пределах от 0 до u, так как в согласии с пределами других суммирований всегда $u\leqslant v$, а $v\leqslant s$:

$$\Sigma_{q+m=s,\ u-q\geqslant 0}(-1)^m\frac{u!}{q!\,(u-q)!}=\Sigma^{u}_{q=0}(-1)^{s-q}\binom{u}{q}.$$

Эта сумма равна 0, если $u>0$, и $(-1)^{(s)}$, если $u=0$. Окончательно

$$\delta\lambda = d\lambda + \Sigma'_{v=0}\Sigma'_{s=0}\frac{(-1)^s s!}{(s-v)!\,v!}d_T^{s-v}\partial_{sj}\lambda_i dx^j\wedge dx^{(v)i},$$

где опять индексы s и v связаны условием $s-v\geqslant 0$, так что правую часть можно переписать в другой форме:

$$\delta\lambda = \Sigma'_{v=0}(\partial_{vj}\lambda_i - \Sigma'_{s=v}(-1)^s\frac{s!}{(s-v)!\,v!}d_T^{s-v}\partial_{si}\lambda_j)\,dx^{(v)j}\wedge dx^i.$$

Требуемый результат получается приравниванием этого выражения к нулю.

Пример. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений третьего порядка. Используем матричные обозначения. Точка будет обозначать тензорное умножение двух матриц с последующей сверткой по всем парам соответствующих индексов, начиная справа. Например: $A\cdot B = A_{ij}B^{k\,ij}_{l}$; $c\cdot A = c^jA_{ij} = A\cdot c$. Обозначенная точкой операция выполняется в последнюю очередь, а не обозначенная — в первую очередь. Знаки $\otimes$, $\odot$ и $\wedge$ — соответственно тензорное, симметрическое и внешнее произведения. Символы S и $\mathcal{A}$ обозначают операции симметризирования и антисимметризирования. Переменные x^i, $x^{(1)i}$, ..., $x^{(4)i}$ обозначаются x, p, q, r, s соответственно.

Утверждение. Система дифференциальных уравнений третьего порядка $w(x, p, q, r)=0$ является системой уравнений Эйлера — Пуассона в том и только том случае, если найдутся зависящие от переменных x и p матрица B, кососимметрическая матрица A и строка c, удовлетворяющие для произвольного столбца y условиям

$$(i)\ 2\partial_p\wedge Ay + y\partial_p\cdot A = 0,$$
$$(ii)\ 2\mathcal{A}(B) - 3p\partial_x\cdot A = 0,$$
$$(iii)\ y\partial_p\cdot S(B) - \partial_p\odot By + p\partial_x\cdot\partial_p\odot Ay = 0,$$
$$(iv)\ 2\partial_p\wedge By - 4\partial_x\wedge Ay + 2p\partial_x\cdot y\partial_p\cdot A + y\partial_x\cdot A = 0,$$
$$(v)\ 2\partial_p\odot c - 2p\partial_x\cdot B + 3(p\partial_x)^2A = 0,$$
$$(vi)\ 2y\partial_p\cdot\partial_p\wedge c + 2p\partial_x\cdot\partial_p\wedge By - 4\partial_x\wedge By + 3p\partial_x\cdot y\partial_x\cdot A +$$
$$+ 3(p\partial_x)^2y\partial_p\cdot A = 0,$$
$$(vii)\ 4\partial_x\wedge c - 2p\partial_x\cdot\partial_p\wedge c - (p\partial_x)^3A = 0$$

и такие, что

$$w = Ar + q\partial_p\cdot Aq + Bq + c.$$

Доказательство. Условия теоремы перепишем следующим образом:

$$\partial_r\odot w = 0, \tag{1}$$
$$2\partial_q\wedge w - 3d_T\partial_r\otimes w = 0, \tag{2}$$

$$2\partial_p \odot w - 2d_T\partial_q \otimes w + 3d_T^2\partial_r \otimes w = 0, \tag{3}$$

$$2\partial_x \wedge w - d_T\partial_p \wedge w + d_T^2\partial_q \wedge w - d_T^3\partial_r \wedge w = 0. \tag{4}$$

Из уравнения (1) следует, что найдутся кососимметрическая матрица A и строка b, такие, что $w = Ar + b$. Тогда уравнение (2) расщепляется по степеням переменной r:

$$2\partial_q \wedge b + 3p\partial_x \cdot A + 3q\partial_p \cdot A = 0, \tag{5}$$

$$2\partial_q \wedge Ar + 3r\partial_q \cdot A = 0. \tag{6}$$

Из последнего уравнения видно, что A не зависит от q. Уравнение (3), расщепленное по степеням r, требует, чтобы

$$2(p\partial_x + q\partial_p) \cdot \partial_q \otimes b - 2\partial_p \odot b + 3(p\partial_x)^2 A + 6p\partial_x \cdot q\partial_p \cdot A + 3q\partial_x \cdot A + 3(q\partial_p)^2 A = 0 \tag{7}$$

и

$$2r\partial_q \cdot \partial_q \otimes b + 3r\partial_p \cdot A - 2\partial_p \odot Ar = 0. \tag{8}$$

Так как согласно уравнению (8) третьи производные по q от b равны нулю, то их можно представить в виде $b = D \cdot q \otimes q + Bq + c$, где матрица D кубическая, матрица B квадратная, c — строка. Уравнение (8) означает теперь, что для произвольного столбца y

$$4D \cdot r \odot y - 3r\partial_p \cdot Ay - 2\partial_p \odot Ar \cdot y = 0,$$

откуда следует, что

$$D \cdot q \otimes q = q\partial_p \cdot Aq. \tag{9}$$

Слагаемые уравнения (5) линейные по q, преобразуются с учетом равенства (9) в условие (i), а слагаемые, не содержащие переменной q, приводят к условию (ii).

В уравнении (7) квадратичная по переменной q часть с учетом равенства (9) превращается в нуль, линейная с учетом того же равенства и условия (i) приводится к уравнению

$$-2p\partial_x \cdot \partial_p \odot Aq - 2q\partial_p \cdot B + 2\partial_p \odot Bq + 3p\partial_x \cdot q\partial_p \cdot A + 3q\partial_x \cdot A = 0, \tag{10}$$

а члены, не содержащие q, сводятся к условию (v). Антисимметрическая часть уравнения (10) — это условие (ii), умноженное слева на $q\partial_p$, а симметрическая — не что иное как условие (iii).

Осталось удовлетворить уравнению (4). Оно состоит из следующих слагаемых:

$$2\partial_x \wedge c - p\partial_x \cdot \partial_p \wedge c - (p\partial_x)^2 \mathcal{A}(B) + (p\partial_x)^3 A = 0, \tag{11}$$

$$2\partial_x \wedge Ar + p\partial_x \cdot \partial_p \wedge Ar + p\partial_x \cdot r\partial_p \cdot A + r\partial_x \cdot A - \partial_p \wedge Br - r\partial_p \cdot \mathcal{A}(B) = 0, \tag{12}$$

$$q\partial_p \cdot (2\partial_x \wedge Aq + p\partial_x \cdot \partial_p \wedge Aq + p\partial_x \cdot q\partial_p \cdot A + q\partial_x \cdot A - \partial_p \wedge Bq - q\partial_p \cdot \mathcal{A}(B)) = 0, \tag{13}$$

$$2\partial_x \wedge Bq - p\partial_x \cdot \partial_p \wedge Bq - q\partial_p \cdot \partial_p \wedge c + (p\partial_x)^2 \cdot \partial_p \wedge Aq - q\partial_x \cdot \mathcal{A}(B) - 2p\partial_x \cdot q\partial_p \cdot \mathcal{A}(B) + 2(p\partial_x)^2 \cdot q\partial_p \cdot A + 3p\partial_x \cdot q\partial_x \cdot A = 0, \tag{14}$$

В силу условия (ii) уравнение (11) превращается в условие (vii). После подстановки в уравнения (12) и (14) соотношений (i) и (ii) они преобразуются в условия (iv) и (vi) соответственно. Уравнение (13) есть следствие уравнения (12).

Отметим, что в случае системы двух дифференциальных уравнений ($N = 2$) условие (i) превращается в тождество, а условия (iv) и (vi) следуют из условий (ii), (iii) и (v).

1. *Tulczyjew W. M.* Sur la differentielle de Lagrange.— C. r. Acad. sci. A, 1975, 280, N 19, p. 1295—1298.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 21.05.79

УДК 534.1 : 531.221.3

Р. М. Таций

О ПОРЯДКЕ РОСТА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО РЯДА

Приведем некоторые необходимые сведения из теории целых функций [4]. На основании известной теоремы Адамара всякую целую функцию

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \tag{1}$$

конечного порядка p можно представить в виде

$$F(z) = e^{g_n(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{p_{mk}(z)}, \tag{2}$$

где z_k — нули функции $F(z)$; $p_{mk}(z)$, $g_n(z)$ — полиномы степеней m и n соответственно, причем $m \leqslant p$, $n \leqslant p$ Большее из чисел m, n называется родом функции $F(z)$.

Пусть $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |F(z)|$. Функция $F(z)$ называется функцией конечного порядка, если существует положительное число a такое, что

$$M(r) < e^{r^a}, \quad r > r_0(a). \tag{3}$$

Нижняя грань p чисел a называется порядком роста функции $F(z)$. Порядок роста функции (1) можно вычислить по формуле

$$p = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{k \ln k}{\ln |c_k|^{-1}}. \tag{4}$$

Порядок p и род ρ функции $F(z)$ связаны соотношением

$$p - 1 \leqslant \rho \leqslant p. \tag{5}$$

Порядок суммы и произведения двух функций $F_1(z)$ и $F_2(z)$ равен большему из них.

Рассмотрим уравнение

$$M[y] = \lambda N[y], \tag{6}$$

где M, N — линейные однородные обыкновенные дифференциальные выражения порядков m и n соответственно ($m > n$); λ — некоторый (комплексный) параметр, и поставим следующую задачу: определить порядок роста решений уравнения (6) как функций параметра λ.

Определение. Если некоторая функция $y(x)$, являясь решением уравнения (6), одновременно удовлетворяет (не удовлетворяет) уравнениям $M[y] = 0$ и $N[y] = 0$, то такое решение будем называть вырожденным (не вырожденным) по параметру λ.

Очевидно, что вырожденные по параметру λ решения имеют нулевой порядок роста.

Теорема. Пусть коэффициенты дифференциальных выражений M и N интегрируемые на промежутке $[a, b]$. Тогда все невырожденные по λ решения уравнения (6) и их производные по x вплоть до $(m - 1)$-го порядка являются целыми аналитическими функциями параметра λ с порядком роста

$$p \leqslant \frac{1}{m - n}. \tag{7}$$