Если устремить $R \to \infty$, то $u \equiv 0$ в области D_l, если выполняются условия

$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial P_k}{\partial x_k} - \sum_{k=1}^{n} P_k^2 + 4(\beta^2 - \alpha^2) > 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} P_k \cos(\widehat{n, x_k}) - \frac{1}{\cos\gamma}\left(2\sigma - \operatorname{tg}\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial\tau} - g\right)\Big|_S \leqslant 0,$$

которые равносильны условиям (4): $P_k = 2B_k$.

Обозначим $\tilde\sigma = \frac{1}{2\cos\gamma}\left(2\sigma - \operatorname{tg}\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial\tau} - g\right)$. Если $\beta^2 - \alpha^2 > 0$, $\tilde\sigma \geqslant 0$, то $u \equiv 0$ в области D_l, так как $B_k \equiv 0$ $(k = \overline{1, n})$. В случае $\tilde\sigma < 0$ докажем такую теорему.

Теорема 2. Если $\bar{l} \in C^{(1)}_{[S]}$, $\sigma(M) \in C_{[S]}$ и выполняется условие

$$\beta^2 \geqslant \alpha^2 + \sigma^{*2} \qquad (\sigma^* = \min_S \tilde\sigma),$$

то задача (1) — (3) в области D_l имеет не более одного решения.

Доказательство. Пусть начало координат совпадает с центром вписанной в область D_l сферы. Функции B_k берем в виде

$$B_k = -\frac{\partial r}{\partial x_k}\sigma^* \qquad \left(r = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\right).$$

Тогда неравенства (4) будут выполняться, если выполняется условие

$$\beta^2 > \alpha^2 + \sigma^{*2} + \frac{2(n-1)}{d_{D_l}}\sigma^*,$$

где d_{D_l} — внутренний диаметр области D_l [3]. Поскольку $\sigma^* < 0$, то последнее неравенство мажорируется таким: $\beta^2 \geqslant \alpha^2 + \sigma^{*2}$.

1. *Данилова И. А.* Внешние краевые задачи для уравнения Гельмгольца.— Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1968, 103, с. 58—72.
2. *Купрадзе В. Д.* Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения.— М. ; Л. : Гостехиздат, 1950.— 280 с.
3. *Скоробогатько В. Я.* Исследование по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными.— Львов : Льв. ун-т, 1961.— 125 с.

Луцкий филиал Львовского политехнического института

Поступила в редколлегию 26.02.79

УДК 518 : 517.91/94

Я. Н. Пелех

ЯВНЫЕ А-УСТОЙЧИВЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В вычислительной практике часто приходится решать задачи с начальными условиями для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$Y' = F(x, Y), \tag{1}$$

где $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ — n-мерные векторы. Систему (1) называют жесткой, если ее матрица Якоби $\frac{\partial F}{\partial Y}$ имеет большой разброс собственных значений. К решению таких систем приводят проблемы построения математических моделей физико-химических, биологических и экономических процессов, задачи многомерной оптимизации, кинетики, электроники, электрических цепей и т. п. Подобные вычислительные задачи могут возникать при решении более сложных дифференциальных задач. Жесткость системы сильно затрудняет, а часто делает практически невозможным интегрирование задачи Коши классическими методами типа Рунге — Кутта или Адамса. Это так, потому что большинство из этих методов являются устойчивыми, если величина шага интегрирования h удовлетворяет неравенству $|h\lambda_i| < K$ для всех собственных чисел λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ матрицы $\frac{\partial F}{\partial Y}$, где K — постоянная, зависящая от метода и не превышающая нескольких единиц. Следовательно, если нас будут интересовать даже только компоненты решения, отвечающие малым λ_i, присутствие больших собственных чисел приводит к выбору столь малого h, что время счета сильно возрастает и влияние ошибок округлений становится существенным [2, 3].

Более удобными здесь оказываются методы, A-устойчивые при любых шагах h. Численный метод называют A-устойчивым [1], если в применении к уравнению

$$y' = \lambda y \tag{2}$$

при всех λ, для которых $\mathrm{Re}\lambda < 0$, его погрешность стремится к нулю, когда $x \to \infty$. Таким образом, удовлетворение критерию A-устойчивости избавляет численные методы от ограничения на величину шага интегрирования. При решении жестких систем подобными методами возможно использование больших шагов, когда это позволяет величина локальной погрешности.

В данной работе предложен алгоритм переменного порядка и шага, причем порядок методов меняется от 1 до 3. Для оценки локальной ошибки аппроксимации A-устойчивых методов типа Рунге — Кутта p-го порядка используются методы более высокого порядка, включающие все стадии метода p-го порядка.

Поскольку предложенные ниже методы покомпонентно переносятся на системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, то для простоты записей будем иметь в виду случай одного дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y) \tag{3}$$

с достаточно гладкой функцией f.

Рассмотрим нелинейный метод вида

$$y_{n+1}^{(m)} = \sum_{i=0}^{m} \frac{c_i|}{|1}, \tag{4}$$

где

$$\sum_{i=0}^{m} \frac{c_i|}{|1} = \cfrac{c_0}{1 + \cfrac{c_1}{1 + \cdots + \cfrac{c_{m-1}}{1 + c_m}}};$$

$m = 1, 2, 3$ — число стадий нелинейного метода (4);

$$c_0 = y_n; \quad c_1 = -\frac{k_1}{y_n} h; \quad c_2 = \frac{hk_1^2 - y_n(a_1k_1 + a_2k_2)}{y_nk_1};$$
$$c_3 = \frac{y_n}{k_1} \cdot \frac{k_1(b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3) - (a_1k_1 + a_2k_2)^2}{hk_1^2 - y_n(a_1k_1 + a_2k_2)}; \tag{5}$$
$$k_1 = f(x_n, y_n); \quad k_2 = f(x_n + \alpha_2h, y_n + \beta_{21}hk_1);$$
$$k_3 = f(x_n + \alpha_3h, y_n + \beta_{31}hk_1 + \beta_{32}hk_2).$$

Из требования, чтобы m-стадийный метод (4) имел порядок аппроксимации $p = m$, необходимо выполнение следующих условий:

$$a_1 = -\frac{1}{2\alpha_2}, \quad a_2 = \frac{1}{2\alpha_2}, \quad b_1 = \frac{2-3\alpha_3}{6\alpha_2\alpha_3}, \quad b_2 = -\frac{2-3\alpha_2}{6\alpha_2(\alpha_3-\alpha_2)},$$

$$b_3 = \frac{2-3\alpha_2}{6\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)}, \quad \beta_{32} = \frac{\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)}{\alpha_2(2-3\alpha_2)}, \quad \beta_{31} = \frac{\alpha_3(\alpha_2(2-3\alpha_2)-(\alpha_3-\alpha_2))}{\alpha_2(2-3\alpha_2)}, \tag{6}$$

где α_2 и α_3 — свободные параметры, причем $\alpha_2 = \beta_{21}$, $\alpha_3 = \beta_{31} + \beta_{32}$.

Погрешность метода (4) имеет вид $T_{n+1}^{(m)} = e_{n+1}^{(m)} + r_{n+1}^{(m)}$, где $e_{n+1}^{(m)}$ — погрешность классических методов Рунге — Кутта m-го порядка, а

$$r_{n+1}^{(m)} = \begin{cases} \dfrac{h^2(y_n')^2}{y_n} + 0(h^3) & \text{для } m = 1, \\ \dfrac{h^3}{4}\dfrac{(y_n'')^2}{y_n'} + 0(h^4) & \text{для } m = 2, \\ \dfrac{h^4}{36}\dfrac{2y_n(y_n''')^2 - 12y_n'y_n''y_n''' + 9(y_n'')^3}{y_ny_n'' - 2y_n'} + 0(h^5) & \text{для } m = 3. \end{cases}$$

Теорема 1. Нелинейный m-стадийный метод (4) A-устойчивый и его операторы перехода в случае уравнения (2) имеют вид

$$S_m(\lambda h) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\lambda h}, & \text{если } m = 1, \\ \dfrac{1+\frac{1}{2}\lambda h}{1-\frac{1}{2}\lambda h}, & \text{если } m = 2, \\ \dfrac{1+\frac{1}{3}\lambda h}{1-\frac{2}{3}\lambda h+\frac{1}{6}(\lambda h)^2}, & \text{если } m = 3. \end{cases}$$

Рассмотрим еще один m-стадийный метод, порядок аппроксимации которого $p = m$:

$$y_{n+1}^{(m)} = \frac{y_n}{1 - h\sum\limits_{j=1}^{m}\beta_j}, \quad m = 1, 2, 3, \tag{7}$$

где

$$\beta_1 = \frac{k_1}{y_n}; \quad \beta_2 = \frac{y_n(a_1k_1 + a_2k_2) - h\cdot k_1^2}{y_n^2};$$

$$\beta_3 = \frac{1}{y_n}[(b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3) - h(\beta_1(a_1k_1 + a_2k_2) + \beta_2k_1)];$$

a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, k_1, k_2, k_3 — определяются формулами (6);

$$r_{n+1}^{(m)} = \begin{cases} h^2\dfrac{(y_n')^2}{y_n} + 0(h^3) & \text{для } m = 1, \\ \dfrac{h^3}{y_n}\left(\dfrac{1}{2}\beta_1y_n'' + \beta_2y_n'\right) + 0(h^4) & \text{для } m = 2, \\ \dfrac{h^4}{y_n}\left(\dfrac{1}{6}\beta_1y_n''' + \dfrac{1}{2}\beta_2y_n'' + \beta_3y_n'\right) + 0(h^5) & \text{для } m = 3. \end{cases}$$

Теорема 2. Нелинейный m-стадийный метод (7) A-устойчивый, монотонный и его операторы перехода в случае уравнения (2) имеют вид

$$S_m(\lambda h) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\lambda h}, & \text{если } m = 1, \\ \dfrac{1}{1-\lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2}, & \text{если } m = 2, \\ \dfrac{1}{1-\lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2 - \frac{1}{6}(\lambda h)^3}, & \text{если } m = 3. \end{cases}$$

Методы (4) и (7) можно использовать вместе. Если $y_n \neq 0$ и $k_1 \neq 0$, то расчеты следует производить по формуле (4), а если $y_n = 0$, то использовать формулу

$$y_{n+1} = \frac{hk_1}{1 - \dfrac{(a_1k_1 + a_2k_2)}{k_1} - \dfrac{k_1(b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3) - (a_1k_1 + a_2k_2)^2}{k_1^2}}.$$

Когда y_n и k_1 равны нулю, то значение y_{n+1} в точке $x_{n+1} = x_n + h$ вычисляется по еще более простым формулам, которые также A-устойчивые. Аналогично строятся методы более высоких порядков точности.

Локальную ошибку аппроксимации m-стадийного метода в точке x_n вычисляем по формуле

$$\delta y_n^{(m)} = \min_{m<j\leqslant 3} \| y_n^{(j)} - y_n^{(m)} \|, \quad m = 1, 2,$$

где $\|\cdot\|$ — максимальная норма вектора. Размер шага выбирается так, чтобы выполнялось неравенство

$$\delta y_n^{(m)} < \frac{\varepsilon h}{X - x_0}, \tag{8}$$

где ε — требуемая точность вычислений в конце интервала интегрирования.

Главный член асимптотического разложения локальной ошибки аппроксимации метода p-го порядка имеет вид

$$R_{n+1}^{(p)} = h^{p+1}\Psi(y_n, y_n', \ldots, y_n^{(p)}).$$

При изменении шага интегрирования в $(g)^i$ раз, где i — положительное или отрицательное целое число, для $h_{\text{нов}} = g^i h$ получаем

$$R_{n+1}^{(p)} = h_{\text{нов}}^{p+1}\Psi(y_n, y_n', \ldots, y_n^{(p)}) = g^{i(p+1)}h^{p+1}\Psi(y_n, y_n', \ldots, y_n^{(p)}).$$

Отсюда, предполагая, что поведение локальной ошибки аппроксимации определяется ее главным членом, можно прогнозировать размер шага интегрирования, проверяя выполнение неравенства

$$\delta y_n^{(m)} < \frac{\varepsilon h}{(X - x_0)\, g^{i(m+1)}}. \tag{9}$$

При этом для вычислений на следующем шаге используется тот m-стадийный метод, для которого прогнозируемый шаг максимальный. Если теперь неравенство (8) выполняется, то y_{n+1} принимается за численное решение в точке $x_{n+1} = x_n + g^i h$, если не выполняется, то шаг интегрирования уменьшается до тех пор, пока не выполнится неравенство (9), и весь цикл повторяется с уменьшенным шагом.

Отметим, что предложенные методы легко использовать для эффективной организации контроля численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. *Dahlguist G.* A special stability problem for linear multistep methods.— BIT, 1963, 3, p. 27—43.
2. *Gear C.* Numerical initial value problem in ordinary differential equations.— New York : Englewood Cliffs prentice hall, 1971.— 259 p.

3. Lapidus L., Seinfeld J. Numerical solution of ordinary differential equations.— New York : Acad. press, 1971.— 299 p.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 12.11.79

УДК 517.972.7

Р. Я. Мацюк

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЛАГРАНЖИАНА ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе [1] приведено необходимое и достаточное условие того, что некоторая автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений является системой Эйлера — Пуассона, т. е. определяет экстремали функционала $\int L\left(x^i(\tau), \frac{dx^i}{d\tau}(\tau), \ldots, \frac{d^r x^i}{d\tau^r}(\tau)\right) d\tau$ при некотором выборе лагранжиана L. Пусть U обозначает открытое множество в R^N с координатами x^i. Пространство 1^r-скоростей T^rU с координатами $x^{(0)i} \equiv x^i$, $x^{(1)i}$, … …, $x^{(r)i}$ изоморфно $U \times R^N \times \ldots$ (r раз) $\times \ldots R^N$. Ниже все отображения, функции и дифференциальные формы считаются класса C^∞. Если I — открытое связное множество в R, содержащее нуль, то отображение σ: $I \to U$, называемое кривой в U, определяет элемент $\bar{\sigma}$ из T^rU по формулам $x^i(\bar{\sigma}) = \sigma^i(0)$, $x^{(1)i}(\bar{\sigma}) = \frac{d\sigma^i}{d\tau}(0)$, …, $x^{(r)i}(\bar{\sigma}) = \frac{d^r\sigma^i}{d\tau^r}(0)$, где $\sigma^i = x^i\sigma$. Любая система функций λ_j на T^rU определяет автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка r, решения которой суть кривые $\sigma(\tau)$ в U, для которых $\lambda_j\left(\sigma^i(\tau), \frac{d\sigma^i}{d\tau}(\tau), \ldots, \frac{d^r\sigma^i}{d\tau^r}(\tau)\right) = 0$. Основной результат состоит в следующем.

Теорема. Система дифференциальных уравнений $\lambda_j(x^i, x^{(g)i}, \ldots, x^{(r)i}) = 0$ ($j = 1, \ldots, N$) является системой уравнений Эйлера — Пуассона в том и только том случае, если

$$\partial_{0j}\lambda_i - \partial_{0i}\lambda_j - \Sigma'_{s=0}(-1)^s \frac{d^s}{d\tau^s}(\partial_{si}\lambda_j - \partial_{sj}\lambda_i) = 0,$$

$$\partial_{vj}\lambda_i - \Sigma'_{s=v}(-1)^s \frac{s!}{(s-v)!\,v!} \frac{d^{s-v}}{d\tau^{s-v}} \partial_{si}\lambda_j = 0$$

для $1 \leqslant v \leqslant r$. Здесь d_{si} обозначает частную производную по $x^{(s)i}$.

Пусть Φ^r обозначает алгебру внешних дифференциальных форм на пространстве T^rU (число r назовем порядком формы); α, β, γ — произвольные такие формы произвольных порядков и f — любая функция на T^rU. Ясно, что $\Phi^r \subset \Phi^s$ при любых $r \leqslant s$. Пусть действуют следующие операторы: 1) дифференцирование d_T из Φ^r в Φ^{r+1}, определяемое соотношениями

$$d_T d = d d_T,$$

$$d_T(\alpha \wedge \beta) = d_T\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge d_T\beta,$$

$$d_T f = \Sigma'_{k=0} x^{(k+1)i}\partial_{ki} f;$$

2) дифференцирование i_{F_m} из Φ^r в Φ^r, определяемое при каждом неотрицательном целом m соотношениями

$$i_{F_m} f = 0,$$