55. *Vermaak J. S., Mays C. W., Kuhlmann-Wilsdorf D.* On surface stress and surface tension.— Surface Sci., 1968, N 12, p. 128—133.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
21.03.79

УДК 517.956.223

И. В. Коробчук

О ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧЕ НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Пусть S — достаточно гладкая замкнутая поверхность в n-мерном пространстве E^n, диффеоморфная $(n-1)$-мерной сфере S^{n-1}; D_l — область, ограниченная поверхностью S и содержащая бесконечность $D_i = E^n \setminus D_l$. Поверхность S принадлежит классу $A^{(2)}$, т. е. удовлетворяет таким условиям:

1) ее можно покрыть конечным числом областей, в каждой из которых координаты текущей точки $x \in S$ допускают параметрическое представление

$$x_i = x_i(t_1, \ldots, t_{n-1}) \qquad (i = \overline{1, n}),$$

где функции x_i определены в ограниченной области Ω изменения переменных $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$;

2) функции x_i осуществляют взаимно однозначное соответствие между замкнутым множеством $\Omega \cup \partial\Omega$ и соответствующей частью S, причем $x_i \in C^{(2)}_{[\Omega \cup \partial\Omega]}$;

3) выражение

$$J = \left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial(x_{k+1}, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{k-1})}{\partial(t_1, \ldots, t_{n-1})}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} > 0;$$

4) направляющие косинусы внешней нормали $\vec{n}$ к поверхности S задаются формулой

$$\cos(\widehat{n, x_k}) = \frac{1}{J}\,\frac{\partial(x_{k+1}, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{k-1})}{\partial(t_1, \ldots, t_{n-1})}.$$

Рассмотрим вопрос о разрешимости в области D_l задачи

$$\Delta u + \omega^2 u = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} + \sigma u\,|_S = f, \tag{2}$$

решение которой удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда при $r \to \infty$:

$$\frac{\partial u}{\partial r} - i\omega u = e^{i\omega r} O\left(r^{-\frac{n-1}{2}}\right), \quad \operatorname{Im}\omega \geqslant 0, \tag{3}$$

где $\omega = \alpha + i\beta$ — комплексный параметр; $\bar{l}$ — гладкое векторное поле на S такое, что $\cos(\widehat{n, l}) > 0$, $\sigma(M)$; $f(M)$ — достаточно гладкие функции на S, причем $\operatorname{Im}\sigma\ (M) \equiv 0$.

Теорема 1. Если $\bar{l} \in C^{(1)}_{[S]}$, $\sigma\ (M) \in C_{[S]}$ и существуют в области D_l действительные непрерывные ограниченные функции $B_k(x)$ $(k = \overline{1, n})$ с кусочно-непрерывными производными $\frac{\partial B_k}{\partial x_k}$ такие, что выполняются неравенства

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k}{\partial x_k}-B_k^2\right)+\beta^2-\alpha^2>0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} B_k\cos(\widehat{n, x_k})-\frac{1}{2\cos\gamma}\left(2\sigma-\operatorname{tg}\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial\tau}-g\right)\Big|_S\leqslant 0, \tag{4}$$

где $\cos\gamma=\cos(\widehat{n, l})>0$, $\frac{\partial}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial l}-\cos\gamma\frac{\partial}{\partial n}$, а g — некоторая функция на S, зависящая лишь от поверхности S, то задача (1) — (3) в области D_l имеет не более одного решения.

Доказательство. Пусть S_R — сфера радиуса R, расположенная в области D_l и содержащая область $\bar{D}_i$; D_R — область между поверхностями S и S_R; n — внешняя по отношению к D_R нормаль. Используем аналог формулы интегрирования по частям на многообразии [1]. Пусть M — гладкое многообразие, погруженное в E^{n+1}, $\xi=\frac{\partial}{\partial\tau}$ — гладкое векторное поле, а F — гладкая функция на M. Тогда интеграл $\int_M\frac{\partial F}{\partial\tau}ds$ сводится к интегралу вида $\int_M Fgds$, где g — некоторая функция. В частности, если $F=\varphi\psi$, то

$$\int_M\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\tau}ds=-\int_M\psi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}+g\varphi\right)ds. \tag{5}$$

Применим формулу Грина к функциям $|u|^2$ и 1 в области D_R:

$$\iint_{D_R}\Delta|u|^2dD_R=\int_{S+S_R}\frac{\partial|u|^2}{\partial n}ds,$$

или

$$\iint_{D_R}\left\{\Delta|u|^2+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}(P_k|u|^2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}(P_k|u|^2)\right\}dD_R=\int_{S+S_R}\frac{\partial|u|^2}{\partial n}ds,$$

где функции $P_k(x)$ $(k=\overline{1, n})$ удовлетворяют условию теоремы. Из уравнения (1) имеем $\Delta|u|^2=2(\beta^2-\alpha^2)|u|^2+2|\operatorname{grad}u|^2$. Используя граничное условие (2) и формулу (5), получаем

$$\iint_{D_R}\left\{2[(\beta^2-\alpha^2)|u|^2+|\operatorname{grad}u|^2]+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial P_k}{\partial x_k}|u|^2+2P_k|u|\frac{\partial|u|}{\partial x_k}\right)\right\}dD_R=$$

$$=\int_S\left\{\sum_{k=1}^{n}P_k\cos(\widehat{n, x_k})-\frac{1}{\cos\gamma}\left[2\sigma-\operatorname{tg}\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial\tau}-g\right]\right\}|u|^2ds+$$

$$+\int_{S_R}\left[\sum_{k=1}^{n}P_k\cos(\widehat{n, x_k})|u|^2+\frac{\partial|u|^2}{\partial n}\right]ds=$$

$$=\int_S\left\{\sum_{k=1}^{n}P_k\cos(\widehat{n, x_k})-\frac{1}{\cos\gamma}\left[2\sigma-\operatorname{tg}\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial\tau}-g\right]\right\}|u|^2ds+$$

$$+\int_{S_R}\left[\sum_{k=1}^{n}P_k\cos(\widehat{n, x_k})-2\beta\right]|u|^2ds+2e^{-2\beta r}\int_{S_R}o(r^{-\frac{n-1}{2}})\,O(r^{-\frac{n-1}{2}})\,ds,$$

что следует из формулы (3) и поведения функции u на бесконечности [2], где

$$u=e^{i\omega r}O(r^{-\frac{n-1}{2}}).$$

Если устремить $R \to \infty$, то $u \equiv 0$ в области D_l, если выполняются условия

$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial P_k}{\partial x_k} - \sum_{k=1}^{n} P_k^2 + 4(\beta^2 - \alpha^2) > 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} P_k \cos(\widehat{n, x_k}) - \frac{1}{\cos\gamma}\left(2\sigma - \operatorname{tg}\gamma \frac{\partial\gamma}{\partial\tau} - g\right)\Big|_S \leqslant 0,$$

которые равносильны условиям (4): $P_k = 2B_k$.

Обозначим $\tilde{\sigma} = \frac{1}{2\cos\gamma}\left(2\sigma - \operatorname{tg}\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial\tau} - g\right)$. Если $\beta^2 - \alpha^2 > 0$, $\tilde{\sigma} \geqslant 0$, то $u \equiv 0$ в области D_l, так как $B_k \equiv 0$ $(k = \overline{1, n})$. В случае $\tilde{\sigma} < 0$ докажем такую теорему.

Теорема 2. Если $\bar{l} \in C^{(1)}_{[S]}$, $\sigma(M) \in C_{[S]}$ и выполняется условие

$$\beta^2 \geqslant \alpha^2 + \sigma^{*2} \qquad (\sigma^* = \min_S \tilde{\sigma}),$$

то задача (1) — (3) в области D_l имеет не более одного решения.

Доказательство. Пусть начало координат совпадает с центром вписанной в область D_l сферы. Функции B_k берем в виде

$$B_k = -\frac{\partial r}{\partial x_k}\sigma^* \qquad \left(r = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\right).$$

Тогда неравенства (4) будут выполняться, если выполняется условие

$$\beta^2 > \alpha^2 + \sigma^{*2} + \frac{2(n-1)}{d_{D_l}}\sigma^*,$$

где d_{D_l} — внутренний диаметр области D_l [3]. Поскольку $\sigma^* < 0$, то последнее неравенство мажорируется таким: $\beta^2 \geqslant \alpha^2 + \sigma^{*2}$.

1. *Данилова И. А.* Внешние краевые задачи для уравнения Гельмгольца.— Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1968, 103, с. 58—72.
2. *Купрадзе В. Д.* Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения.— М. ; Л. : Гостехиздат, 1950.— 280 с.
3. *Скоробогатько В. Я.* Исследование по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными.— Львов : Льв. ун-т, 1961.— 125 с.

Луцкий филиал Львовского
политехнического института

Поступила в редколлегию
26.02.79

УДК 518 : 517.91/94

Я. Н. Пелех

ЯВНЫЕ А-УСТОЙЧИВЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В вычислительной практике часто приходится решать задачи с начальными условиями для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$Y' = F(x, Y), \tag{1}$$

где $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ — n-мерные векторы. Систему (1) называют жесткой, если ее матрица Якоби $\frac{\partial F}{\partial Y}$ имеет большой разброс собственных значений. К решению таких систем приводят проблемы построения математических моделей физико-химических, биологических и экономических процессов, задачи многомерной оптимизации, кинетики, эле-