Учитывая утверждение леммы, где $N = 1$, α_s, $\beta_{s+1}N^{-1}$, α_{s+2}, ... — точные, а β_{s+1}, $\alpha_{s+2}N^{-1}$, β_{s+3}, ... — их приближенные значения, и условия (10) теоремы 3, получаем

$$|r_s(p) - \rho_{s+1}(p)| \leqslant r_s(p) \max_{\substack{0 \leqslant k \leqslant 2p \\ 1 \leqslant m \leqslant 2p-1}} \left\{ \left| \frac{\beta_{s+1+k} - \alpha_{s+k}}{\alpha_{s+k}} \right|, \right.$$
$$\left. \left| \frac{(\alpha_{s+m+1}N^{-1} - \beta_{s+m}N^{-1})/\beta_{s+m}N^{-1}}{1 + (\alpha_{s+m+1}N^{-1} - \beta_{s+m}N^{-1})/\beta_{s+m}N^{-1}} \right| \right\} \leqslant \varepsilon(M+1).$$

Таким образом,

$$K - \varepsilon \leqslant |\rho_{s+1} - r_s| \leqslant (r_s - r_s(p)) + (\rho_{s+1} - \rho_{s+1}(p)) +$$
$$+ |r_s(p) - \rho_{s+1}(p)| \leqslant 2\varepsilon + \varepsilon(M+1) = \varepsilon(M+3),$$

что невозможно для произвольных достаточно малых ε и достаточно больших K. Из полученного противоречия следует, что случай б) в предположениях теоремы 3 не имеет места. Теорема 3 доказана.

Замечание. Как видно из доказательства теоремы, условие (10) существенно используется только в том случае, если $\underline{\lim}_{k\to\infty} \alpha_k = 0$. Если же $\overline{\lim}_{k\to\infty} \alpha_k > 0$, то условия (4), (5) следствия гарантируют сходимость ветвящейся цепной дроби (1).

1. *Боднар Д. И.* Об одном обобщении признака сходимости Зейделя для ветвящихся цепных дробей.— В кн.: Математический сборник. Киев : Наук. думка, 1976, с. 44—47.
2. *Боднар Д. И.* Исследование сходимости одного класса ветвящихся цепных дробей.— В кн.: Цепные дроби и их применение. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1976, с. 41—44.
3. *Боднар Д. И.* Достаточные признаки сходимости ветвящихся цепных дробей с положительными компонентами.— В кн.: Материалы V конф. молодых ученых Льв. фил. мат. физики Ин-та математики АН УССР. Секция математики и мат. методов. Львов, 1978, с. 3—6.— Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 1846—79 Деп.
4. *Боднар Д. И.* Необходимый признак сходимости ветвящихся цепных дробей с положительными компонентами.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1979, вып. 10, с. 15—19.
5. *Боднарчук П. І., Скоробогатько В. Я.* Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування.— К. : Наук. думка, 1974.— 271 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
22.06.79

УДК 532.72 : 624.043

Ю. З. Повстенко

УЧЕТ ПОВЕРХНОСТНОЙ ЭНЕРГИИ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Одним из основных направлений развития фундаментальных исследований в области механики деформируемого твердого тела является расширение свойств механических моделей путем учета различного рода немеханических форм движения. Такое расширение свойств теоретических моделей требует введения дополнительных параметров состояния, для определения которых необходимо получить дополнительные уравнения, описывающие конкретные процессы. Общий подход к построению континуальных моделей с расширенными физико-механическими свойствами разработан Л. И. Седовым [41, 42].

В работе [17] (см. также последующие работы [19, 28, 30]) методами механики сплошной среды и термодинамики необратимых процессов получена линейная система дифференциальных уравнений, описывающая физико-механическое состояние двухкомпонентного твердого раствора с учетом взаимосвязи между процессами деформации, теплопроводности и диффузии вещества и имеющая вид:

уравнение равновесия (при отсутствии массовых сил)

$$\nabla_m \sigma^{mk} = 0; \tag{1}$$

балансовые уравнения

$$\begin{aligned} \nabla^2 t &= \frac{\omega_{e,\varphi}}{\lambda_{e,\varphi}} \frac{\partial t}{\partial \tau} + d_{e,\varphi} \frac{\partial e}{\partial \tau} + \gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}, \\ \nabla^2 \varphi &= \frac{\omega_{e,t}}{\lambda_{e,t}} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + d_{e,t} \frac{\partial e}{\partial \tau} + \gamma_t \frac{\partial t}{\partial \tau}; \end{aligned} \tag{2}$$

уравнения состояния

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2Ge_{ij} + (\lambda_{\varphi,t} e - \beta_\varphi K_{\varphi,t} \varphi - \beta_t K_{\varphi,t} t) g_{ij}, \\ s &= \frac{\omega_{e,\varphi}}{T_0} t + \frac{\beta_t K_{\varphi,t}}{\rho} e + \gamma_{e,t} \varphi, \\ c &= \omega_{e,t} \varphi + \frac{\beta_\varphi K_{\varphi,t}}{\rho} e + \gamma_{e,\varphi} t; \end{aligned} \tag{3}$$

геометрические соотношения

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i U_j + \nabla_j U_i) \tag{4}$$

и уравнения совместности деформаций

$$\epsilon^{ijk} \epsilon^{rst} \nabla_i \nabla_r e_{js} = 0. \tag{5}$$

Здесь $\vec{U}$ — вектор перемещения; $\hat{e}$ и $\hat{\sigma}$ — тензоры деформаций и напряжений; $e = g^{ij} e_{ij}$; $t = T - T_0$ — приращение абсолютной температуры (отклонение температуры от равновесного значения T_0); $s = S - S_0$ — приращение плотности энтропии на единицу массы; $\varphi = \Phi - \Phi_0$ — приращение разности химических потенциалов компонент твердого раствора; $c = C - C_0$ — приращение концентрации растворенного вещества, рассчитанной на единицу массы; τ — время; G — модуль сдвига; $\lambda_{\varphi,t}$ и $K_{\varphi,t}$ — постоянная Ляме и объемный модуль упругости; $\omega_{e,t}$ — коэффициент, характеризующий изменение концентрации с изменением разности химических потенциалов; $\omega_{e,\varphi}$ — удельная теплоемкость; $\lambda_{e,t}$ — коэффициент массопроводности; $\lambda_{e,\varphi}$ — коэффициент теплопроводности; $\gamma_{e,t}$ — коэффициент, характеризующий изменение энтропии с изменением разности химических потенциалов; $\gamma_{e,\varphi}$ — коэффициент, характеризующий изменение концентрации с изменением температуры. Два нижних индекса φ, t (e, t; e, φ) указывают, что коэффициент подсчитывается при постоянных разности химических потенциалов и температуре (постоянных объеме и температуре; постоянных объеме и разности химических потенциалов); α_t и и β_t — коэффициенты линейного и объемного температурного расширения ($\beta_t = 3\alpha_t$); α_φ и β_φ — коэффициенты линейного и объемного концентрационного расширения ($\beta_\varphi = 3\alpha_\varphi$);

$$d_{e,t} = \frac{\beta_\varphi K_{\varphi,t}}{\rho \lambda_{e,t}}; \quad d_{e,\varphi} = \frac{\beta_t K_{\varphi,t} T_0}{\rho \lambda_{e,\varphi}}; \quad \gamma_t = \frac{\gamma_{e,\varphi}}{\lambda_{e,t}}; \quad \gamma_\varphi = \frac{\gamma_{e,t} T_0}{\lambda_{e,\varphi}};$$

∇_i — символ ковариантного дифференцирования; ∇^2 — оператор Лапласа; $\hat{g}$ — метрический тензор; ϵ^{ijk} — компоненты ϵ-тензора.

В рамках принятого линейного приближения плотность ρ считается постоянной. После решения системы уравнений (1) — (5) истинное распределение плотности можно найти из уравнения неразрывности, которое запишем в несколько преобразованном виде $d\rho = -\rho de$.

При выводе уравнений (1) — (5) существенным образом использовалась гипотеза локального равновесия [10, 11]

$$df = -SdT + \frac{1}{\rho}\sigma^{ij}de_{ij} + \Phi dC, \qquad (6)$$

которая, в частности, при задании плотности (на единицу массы) свободной энергии позволяет получить уравнения состояния

$$S = -\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{\hat{e},C}, \quad \sigma^{ij} = \rho\left(\frac{\partial f}{\partial e_{ij}}\right)_{T,C}, \quad \Phi = \left(\frac{\partial f}{\partial C}\right)_{\hat{e},T}. \qquad (7)$$

Например, раскладывая функцию $f\ (T,\ e_{ij},\ C)$ в ряд в окрестности точки $T = T_0,\ e_{ij} = 0,\ C = C_0$ и ограничиваясь квадратичными слагаемыми

$$f = f_0 - S_0 t + \Phi_0 c + A_1 t^2 + A_2 c^2 + A_3 tc + A_4 e^2 + A_5 ec + A_6 et + A_7 e^{ij} e_{ij}, \qquad (8)$$

с помощью формул (7) при соответствующем физическом истолковании коэффициентов A_i приходим к линейным уравнениям состояния (3). Подчеркнем, что в разложении (8) линейное по e слагаемое отсутствует, так как предполагается, что в начальном состоянии нет напряжений и деформаций. Постоянная f_0 представляет собой значение плотности свободной энергии в начальном состоянии и никак не отражается на уравнениях состояния, получаемых путем дифференцирования.

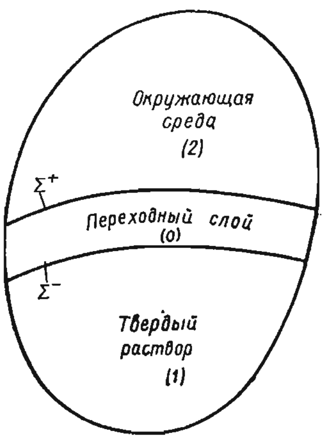

Рис. 1

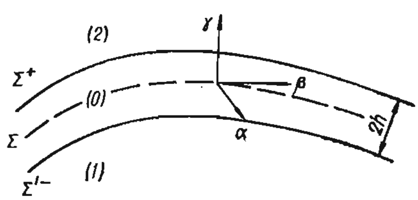

Рис. 2

Постановка краевых задач для описанной системы уравнений требует задания начальных и граничных условий. Характерные особенности различных типов начальных условий исследовались в работах [33, 35]. Мы рассмотрим достаточно общие с точки зрения рассматриваемых предпосылок граничные условия. При их выводе будем исходить из того, что вблизи поверхности раздела двух сред в связи с перегруппировкой атомов, вследствие окисления, нанесения специального покрытия и т. д. образуется приповерхностный слой, обладающий отличными от основного материала физико-механическими свойствами (рис. 1) [18, 27, 36, 39].

Величины, относящиеся к двум контактирующим средам и переходному слою между ними, будем отмечать верхними индексами (1), (2), (0).

Предположим, что поведение материала в областях (1) и (0) описывается соответствующими системами уравнений (1)—(5). В области (2) также необходимо рассматривать систему уравнений модели, выбранной для описания ее свойств. Для простоты будем считать, что механическое и физическое воздействие среды (2) на переходный слой известно, т. е. на поверхности Σ^+ заданы необходимые величины.

Таким образом, возникает необходимость решения трехмерных систем уравнений в областях (1) и (0) и стыковки полученных решений. Вместе с тем незначительная, как правило, толщина переходного слоя по сравнению с другими размерами тела позволяет при некоторых допущениях тем или иным способом вместо трехмерных уравнений получить двумерные и трактовать их как обобщенные граничные условия.

Существуют различные методы сведения трехмерных систем к двумерным (в основном для невзаимосвязанных уравнений). Например, допускают, что толщина слоя постоянна, и используют разложение искомых величин в степенные ряды по нормальной к срединной поверхности координате [9, 12, 16, 32], по полиномам Лежандра [2], символический (операторный) [15, 21, 29, 31] и другие [1, 4, 8] методы.

Проиллюстрируем основные идеи на простейшем случае линейной зависимости искомых величин от нормальной координаты γ. Смешанная система координат α, β, γ представлена на рис. 2. В дальнейшем будем придерживаться обозначений, принятых в монографии [34]. Таким образом, при использовании гипотез Кирхгофа — Лява получим

$$U^{(0)} = u - \theta_1\gamma, \quad V^{(0)} = v - \theta_2\gamma, \quad W^{(0)} = w;$$
$$e_{\alpha\alpha}^{(0)} = \varepsilon_1 + \varkappa_1\gamma, \quad e_{\beta\beta}^{(0)} = \varepsilon_2 + \varkappa_2\gamma, \tag{9}$$

$$e_{\alpha\beta}^{(0)} = \varepsilon_{12} + 2\varkappa_{12}\gamma, \quad e_{\alpha\gamma}^{(0)} = e_{\beta\gamma}^{(0)} = e_{\gamma\gamma}^{(0)} = 0; \tag{10}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)} = \frac{1}{2h}\left(N_1 + 3M_1\frac{\gamma}{h^2}\right), \quad \sigma_{\beta\beta}^{(0)} = \frac{1}{2h}\left(N_2 + 3M_2\frac{\gamma}{h^2}\right),$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(0)} = \frac{1}{2h}\left(S_{12} + 3H_{12}\frac{\gamma}{h^2}\right), \quad \sigma_{\gamma\gamma}^{(0)} = 0; \tag{11}$$

$$t^{(0)} = T_1 + T_2\frac{\gamma}{h}, \quad s^{(0)} = S_1 + 3S_2\frac{\gamma}{h}; \tag{12}$$

$$\varphi^{(0)} = \Phi_1 + \Phi_2\frac{\gamma}{h}, \quad c^{(0)} = C_1 + 3C_2\frac{\gamma}{h}, \tag{13}$$

где $\theta_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha} - k_1 u$; $\theta_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta} - k_2 v$; u, v, w — перемещения; ε_1, ε_2, ε_{12}, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_{12}$ — компоненты деформации; k_1, k_2 — главные кривизны; A, B — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности слоя Σ;

$$N_1 = \int_{-h}^{h} \sigma_{\alpha\alpha}^{(0)}(1 + k_2\gamma)\,d\gamma; \quad N_{12} = \int_{-h}^{h} \sigma_{\alpha\beta}^{(0)}(1 + k_2\gamma)\,d\gamma,$$

$$N_2 = \int_{-h}^{h} \sigma_{\beta\beta}^{(0)}(1 + k_1\gamma)\,d\gamma, \quad N_{21} = \int_{-h}^{h} \sigma_{\beta\alpha}^{(0)}(1 + k_1\gamma)\,d\gamma,$$

$$M_1 = \int_{-h}^{h} \sigma_{\alpha\alpha}^{(0)}(1 + k_2\gamma)\,\gamma d\gamma, \quad M_{12} = \int_{-h}^{h} \sigma_{\alpha\beta}^{(0)}(1 + k_2\gamma)\,\gamma d\gamma, \tag{14}$$

$$M_2 = \int_{-h}^{h} \sigma_{\beta\beta}^{(0)}(1 + k_1\gamma)\,\gamma d\gamma, \quad M_{21} = \int_{-h}^{h} \sigma_{\beta\alpha}^{(0)}(1 + k_1\gamma)\,\gamma d\gamma,$$

$$S_{12} = S_{21} = N_{12} - k_2 M_{21} = N_{21} - k_1 M_{12}, \quad H_{12} = H_{21} = \frac{1}{2}(M_{12} + M_{21});$$

$$T_1 = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} t^{(0)}d\gamma, \quad T_2 = \frac{3}{2h^2}\int_{-h}^{h} t^{(0)}\gamma d\gamma,$$

$$S_1 = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} s^{(0)}d\gamma, \quad S_2 = \frac{1}{2h^2}\int_{-h}^{h} s^{(0)}\gamma d\gamma,$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \varphi^{(0)}d\gamma, \quad \Phi_2 = \frac{3}{2h^2}\int_{-h}^{h} \varphi^{(0)}\gamma d\gamma, \tag{15}$$

$$C_1 = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} c^{(0)}d\gamma, \quad C_2 = \frac{1}{2h^2}\int_{-h}^{h} c^{(0)}\gamma d\gamma.$$

Постулируем уравнение локального равновесия в виде

$$dF = - S_1 dT_1 - S_2 dT_2 + \Phi_1 dC_1 + \Phi_2 dC_2 +$$
$$+ \frac{1}{\rho}(N_1 d\varepsilon_1 + N_2 d\varepsilon_2 + S_{12} d\varepsilon_{12} + M_1 d\varkappa_1 + M_2 d\varkappa_2 + 2H_{12} d\varkappa_{12}). \quad (16)$$

Тогда уравнения состояния определяются с помощью соотношений

$$N_1 = \rho \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_1}, \quad N_2 = \rho \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_2}, \quad S_{12} = \rho \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{12}}; \quad (17)$$

$$M_1 = \rho \frac{\partial F}{\partial \varkappa_1}, \quad M_2 = \rho \frac{\partial F}{\partial \varkappa_2}, \quad 2H_{12} = \rho \frac{\partial F}{\partial \varkappa_{12}}; \quad (18)$$

$$S_1 = -\frac{\partial F}{\partial T_1}, \quad S_2 = -\frac{\partial F}{\partial T_2}; \quad (19)$$

$$\Phi_1 = \frac{\partial F}{\partial C_1}, \quad \Phi_2 = \frac{\partial F}{\partial C_2}, \quad (20)$$

где $F = \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} f^{(0)}(1 + k_1\gamma)(1 + k_2\gamma)\,d\gamma$ — усредненная плотность (на единицу массы) свободной энергии приповерхностного слоя; $\rho = \int\limits_{-h}^{h} \rho^{(0)} d\gamma$ — усредненная плотность, относительно которой в рамках принятой линейной теории можно повторить все сказанное выше о плотности $\rho^{(0)}$, в частности, из уравнения неразрывности следует, что

$$d\rho = -\rho d(\varepsilon_1 + \varepsilon_2). \quad (21)$$

При исследовании поверхностных явлений в сплошных средах рассматривают плотность свободной энергии не на единицу массы (F), а на единицу площади поверхности $F_\Sigma = \rho F$. В отличие от постоянной F_0 в разложении функции F в ряд в окрестности начального состояния постоянная $F_{\Sigma 0}$ в разложении в ряд функции F_Σ играет важную роль при получении уравнений состояния. Величину $F_{\Sigma 0}$ при некоторых допущениях можно трактовать как поверхностную энергию γ_0. Необходимость учета постоянной $F_{\Sigma 0}$ при исследовании явлений, связанных с образованием поверхности, отмечалась Л. И. Седовым [43—45].

Соотношения (17) с помощью формулы (21) перепишем в виде

$$N_1 = \rho \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_1} = \frac{\partial \rho F}{\partial \varepsilon_1} - F \frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon_1} = \frac{\partial F_\Sigma}{\partial \varepsilon_1} + F\rho \frac{\partial(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\partial \varepsilon_1} = F_\Sigma + \frac{\partial F_\Sigma}{\partial \varepsilon_1},$$
$$N_2 = F_\Sigma + \frac{\partial F_\Sigma}{\partial \varepsilon_2}. \quad (22)$$

Формулы (22) известны как формулы Херринга [49, 52, 53, 55].

Поскольку $F = \frac{F_\Sigma}{\rho}$, то в разложении функции F в ряд в окрестности начального состояния появляется линейное по $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ слагаемое. Действительно,

$$F = \frac{F_\Sigma}{\rho} \approx \frac{F_\Sigma}{\rho_0(1-\varepsilon)} \approx \frac{F_\Sigma}{\rho_0}(1+\varepsilon) \approx \frac{\gamma_0}{\rho_0} + \frac{\gamma_0}{\rho_0}\varepsilon + \text{квадратичные слагаемые}, \quad (23)$$

где ρ_0 — плотность материала недеформированного приповерхностного слоя. Таким образом, ограничиваясь квадратичными слагаемыми, получаем

$$F = F_0 + \frac{\gamma_0}{\rho_0}\varepsilon + B_1 T_1^2 + B_2 T_2^2 + B_3 C_1^2 + B_4 C_2^2 + B_5 T_1 C_1 +$$
$$+ B_6 T_2 C_2 + B_7 \varepsilon^2 + B_8 \varkappa^2 + B_9 \varepsilon^* + B_{10}\varkappa^* + B_{11}\varepsilon T_1 + B_{12}\varepsilon C_1 +$$
$$+ B_{13}\varkappa T_2 + B_{14}\varkappa C_2 + B_{15}\varepsilon T_2 + B_{16}\varepsilon C_2 + B_{17}\varkappa T_1 + B_{18}\varkappa C_1 + B_{19}\varkappa\varepsilon +$$
$$+ B_{20} T_2 C_1 + B_{21} T_1 C_2 + B_{22} T_1 T_2 + B_{23} C_1 C_2. \quad (24)$$

Здесь $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2$, $\varepsilon^* = \varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\varkappa^* = \varkappa_{\alpha\beta}\varkappa_{\alpha\beta}$. Обычно постоянные $B_{15}, \ldots, B_{23}$ полагают равными нулю, в дальнейшем мы также ограничимся этим приближением. Отметим, однако, что в литературе известны уравнения состояния с более сложными перекрестными эффектами, например в теории поверхностей Коссера [50].

Формулы (24) при соответствующем физическом истолковании постоянных B_i приводят к уравнениям состояния

$$N_1 = \gamma_0 + D_1 [\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2 - (1+\nu)\, \alpha_t^{(0)} T_1 - (1+\nu)\, \alpha_\varphi^{(0)} \Phi_1] = \gamma_0 + N_1^*,$$

$$N_2 = \gamma_0 + D_1 [\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1 - (1+\nu)\, \alpha_t^{(0)} T_1 - (1+\nu)\, \alpha_\varphi^{(0)} \Phi_1] = \gamma_0 + N_2^*,$$

$$S_{12} = \frac{1-\nu}{2} D_1 \varepsilon_{12}; \tag{25}$$

$$M_1 = D_2 \left(\varkappa_1 + \nu\varkappa_2 - \frac{1+\nu}{h} \alpha_t^{(0)} T_2 - \frac{1+\nu}{h} \alpha_\varphi^{(0)} \Phi_2\right),$$

$$M_2 = D_2 \left(\varkappa_2 + \nu\varkappa_1 - \frac{1+\nu}{h} \alpha_t^{(0)} T_2 - \frac{1+\nu}{h} \alpha_\varphi^{(0)} \Phi_2\right),$$

$$H_{12} = (1-\nu) D_2 \varkappa_{12}; \tag{26}$$

$$S_1 = \frac{\omega_{e,\varphi}^{(0)}}{T_0} T_1 + \frac{\beta_t^{(0)} K_{\varphi,t}^{(0)}}{\rho^{(0)}} \varepsilon + \gamma_{e,t}^{(0)} \Phi_1,$$

$$S_2 = \frac{\varphi_{e,\varphi}^{(0)}}{3T_0} T_2 + \frac{\beta_t^{(0)} K_{\varphi,t}^{(0)} h}{3\rho^{(0)}} \varkappa + \frac{\gamma_{e,t}^{(0)}}{3} \Phi_2; \tag{27}$$

$$C_1 = \omega_{e,t}^{(0)} \Phi_1 + \frac{\beta_\varphi^{(0)} K_{\varphi,t}^{(0)}}{\rho^{(0)}} \varepsilon + \gamma_{e,\varphi}^{(0)} T_1,$$

$$C_2 = \frac{\omega_{e,t}^{(0)}}{3} \Phi_2 + \frac{\beta_\varphi^{(0)} K_{\varphi,t}^{(0)} h}{3\rho^{(0)}} \varkappa + \frac{\gamma_{e,\varphi}^{(0)}}{3} T_2, \tag{28}$$

где $D_1 = \frac{2hE_{\varphi,t}^{(0)}}{1-\nu^2}$; $D_2 = \frac{2h^3}{3} \frac{E_{\varphi,t}^{(0)}}{1-\nu^2}$; $\nu \equiv \nu_{\varphi,t}^{(0)}$ — коэффициент Пуассона; $E_{\varphi,t}^{(0)}$ — модуль Юнга материала приповерхностного слоя. Усредненные уравнения состояния исследовались в работах [26, 48], в которых, однако, не делалось различия между величинами N_1, N_2 и N_1^*, N_2^*, т. е. не учитывалось влияние поверхностной энергии.

Усреднение трехмерных уравнений (1) — (5), записанных в ортогональной смешанной системе координат α, β, γ, приводит после некоторых преобразований к следующей двумерной системе уравнений относительно введенных усредненных характеристик:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial BN_1}{\partial\alpha} - \frac{\partial B}{\partial\alpha} N_2 + \frac{\partial AS_{12}}{\partial\beta} + \frac{\partial A}{\partial\beta} S_{12} + k_1 \left(\frac{\partial BM_1}{\partial\alpha} - \frac{\partial B}{\partial\alpha} M_2 + \right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial AH_{12}}{\partial\beta} + 2\frac{k_2}{k_1}\frac{\partial A}{\partial\beta} H_{12}\right) = -AB\,(\sigma_{\alpha\gamma}^{(2)} - \sigma_{\alpha\gamma}^{(1)}),$$

$$\frac{\partial AN_2}{\partial\beta} - \frac{\partial A}{\partial\beta} N_1 + \frac{\partial BS_{12}}{\partial\alpha} + \frac{\partial B}{\partial\alpha} S_{12} + k_2 \left(\frac{\partial AM_2}{\partial\beta} - \frac{\partial A}{\partial\beta} M_1 + \right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial BH_{12}}{\partial\alpha} + 2\frac{k_1}{k_2}\frac{\partial B}{\partial\alpha} H_{12}\right) = -AB\,(\sigma_{\gamma\beta}^{(2)} - \sigma_{\beta\gamma}^{(1)}), \tag{29}$$

$$k_1 N_1 + k_2 N_2 - \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{A}\left(\frac{\partial BM_1}{\partial\alpha} - \frac{\partial B}{\partial\alpha} M_2 + \frac{\partial AH_{12}}{\partial\beta} + \frac{\partial A}{\partial\beta} H_{12} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\left(\frac{\partial AM_2}{\partial\beta} - \frac{\partial A}{\partial\beta} M_1 + \frac{\partial BH_{12}}{\partial\alpha} + \frac{\partial B}{\partial\alpha} H_{12}\right)\right] = \sigma_{\gamma\gamma}^{(2)} - \sigma_{\gamma\gamma}^{(1)};$$

балансовые уравнения

$$\Delta T_1+\frac{1}{2h}\left[\left(\frac{\partial t^{(0)}}{\partial\gamma}\right)^+-\left(\frac{\partial t^{(0)}}{\partial\gamma}\right)^-\right]=\frac{\omega_{e,\varphi}^{(0)}}{\lambda_{e,\varphi}^{(0)}}\frac{\partial T_1}{\partial\tau}+d_{e,\varphi}^{(0)}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}+\gamma_\varphi^{(0)}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\tau},$$

$$\Delta T_2+\frac{3}{2h}\left[\left(\frac{\partial t^{(0)}}{\partial\gamma}\right)^++\left(\frac{\partial t^{(0)}}{\partial\gamma}\right)^-\right]-\frac{3}{2h^2}\left[(t^{(0)})^+-(t^{(0)})^-\right]=$$

$$=\frac{\omega_{e,\varphi}^{(0)}}{\lambda_{e,\varphi}^{(0)}}\frac{\partial T_2}{\partial\tau}+d_{e,\varphi}^{(0)}h\frac{\partial\varkappa}{\partial\tau}+\gamma_\varphi^{(0)}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\tau},\tag{30}$$

$$\Delta\Phi_1+\frac{1}{2h}\left[\left(\frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial\gamma}\right)^+-\left(\frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial\gamma}\right)^-\right]=\frac{\omega_{e,t}^{(0)}}{\lambda_{e,t}^{(0)}}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\tau}+d_{e,t}^{(0)}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}+\gamma_t^{(0)}\frac{\partial T_1}{\partial\tau},$$

$$\Delta\Phi_2+\frac{3}{2h}\left[\left(\frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial\gamma}\right)^++\left(\frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial\gamma}\right)^-\right]-\frac{3}{2h^2}\left[(\varphi^{(0)})^+-(\varphi^{(0)})^-\right]=$$

$$=\frac{\omega_{e,t}^{(0)}}{\lambda_{e,t}^{(0)}}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\tau}+d_{e,t}^{(0)}h\frac{\partial\varkappa}{\partial\tau}+\gamma_t^{(0)}\frac{\partial T_2}{\partial\tau};$$

геометрические соотношения

$$\varepsilon_1=\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}v+k_1w,$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}u+k_2w,$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{A}\right)+\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{B}\right),$$

$$\varkappa_1=-\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}-k_1u\right)-\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}-k_2v\right),$$

$$\varkappa_2=-\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}-k_2v\right)-\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}-k_1u\right),$$

$$\varkappa_{12}=-\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial^2w}{\partial\alpha\partial\beta}-\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\alpha}-\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)+$$

$$+k_1\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{A}\right)+k_2\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{B}\right);\tag{31}$$

уравнения совместности деформаций *

$$\frac{\partial B\varkappa_2}{\partial\alpha}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}\varkappa_1-\frac{\partial A\varkappa_{12}}{\partial\beta}-\frac{\partial A}{\partial\beta}\varkappa_{12}+$$

$$+k_1\left(-\frac{\partial B\varepsilon_2}{\partial\alpha}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}\varepsilon_1+\frac{\partial A\varepsilon_{12}}{\partial\beta}+\frac{k_2}{k_1}\frac{\partial A}{\partial\beta}\varepsilon_{12}\right)=0,$$

$$\frac{\partial A\varkappa_1}{\partial\beta}-\frac{\partial A}{\partial\beta}\varkappa_2-\frac{\partial B\varkappa_{12}}{\partial\alpha}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}\varkappa_{12}+$$

$$+k_2\left(-\frac{\partial A\varepsilon_1}{\partial\beta}+\frac{\partial A}{\partial\beta}\varepsilon_2+\frac{\partial B\varepsilon_{12}}{\partial\alpha}+\frac{k_1}{k_2}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\varepsilon_{12}\right)=0,\tag{32}$$

$$k_2\varkappa_1+k_1\varkappa_2-\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{A}\left(-\frac{\partial B\varepsilon_2}{\partial\alpha}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}\varepsilon_1+\frac{1}{2}\frac{\partial A\varepsilon_{12}}{\partial\beta}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\varepsilon_{12}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\left(-\frac{\partial A\varepsilon_1}{\partial\beta}+\frac{\partial A}{\partial\beta}\varepsilon_2+\frac{1}{2}\frac{\partial B\varepsilon_{12}}{\partial\alpha}+\frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\varepsilon_{12}\right)\right]=0,$$

а также уравнения состояния (26) — (28) и выражения для N_1^* и N_2^*, которые необходимо дополнить слагаемым γ_0, чтобы учесть влияние поверхностной энергии (формулы (25)).

* Вывод уравнений (29) и (32) из соответствующих уравнений системы (1) — (5) изложен, например, в монографиях [3, 8].

Индексами $+$ и $-$ в уравнениях (30) отмечены значения рассматриваемых величин на поверхностях $\gamma = \pm h$;

$\Delta = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right]$ — оператор Бельтрами.

В случае линейного распределения температуры и разности химических потенциалов по толщине справедливы соотношения

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}\left[(t^{(0)})^+ + (t^{(0)})^-\right], \quad T_2 = \frac{1}{2}\left[(t^{(0)})^+ - (t^{(0)})^-\right], \\ \Phi_1 &= \frac{1}{2}\left[(\varphi^{(0)})^+ + (\varphi^{(0)})^-\right], \quad \Phi_2 = \frac{1}{2}\left[(\varphi^{(0)})^+ - (\varphi^{(0)})^-\right]. \end{aligned} \tag{33}$$

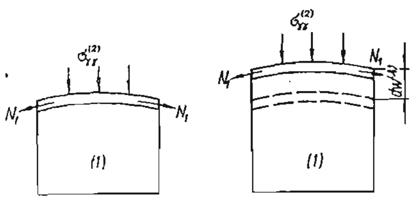

Рис. 3

Дальнейшие выкладки будут относиться к тому случаю, когда «растворенной» компонентой являются вакансии.

Предположим, что на поверхности $\gamma = +h$ выполняются условия тепло- и массообмена по закону Ньютона

$$\lambda_{e,\varphi}^{(0)}\left(\frac{\partial t^{(0)}}{\partial\gamma}\right)^+ = \mu_t\left[t^{(2)} - (t^{(0)})^+\right], \tag{34}$$

$$\lambda_{e,t}^{(0)}\left(\frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial\gamma}\right)^+ = \mu_\varphi\left[\varphi^{(2)} - (\varphi^{(0)})^+\right], \tag{35}$$

(μ_t и μ_φ — коэффициенты тепло- и массоотдачи с поверхности), а при $\gamma = -h$ — условия идеального контакта

$$\begin{gathered} \lambda_{e,\varphi}^{(0)}\left(\frac{\partial t^{(0)}}{\partial\gamma}\right)^- = \lambda_{e,\varphi}^{(1)}\frac{\partial t^{(1)}}{\partial\gamma}, \\ (t^{(0)})^- = t^{(1)}; \\ \lambda_{e,t}^{(0)}\left(\frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial\gamma}\right)^- = \lambda_{e,t}^{(1)}\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial\gamma}, \end{gathered} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} = (\varphi^{(0)})^- + \Omega\Big\{\sigma_{\gamma\gamma}^{(2)} - (k_1N_1 + k_2N_2) + \\ + \frac{1}{AB}\Big[\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{A}\left(\frac{\partial BM_1}{\partial\alpha} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}M_2 + \frac{\partial AH_{12}}{\partial\beta} + \frac{\partial A}{\partial\beta}H_{12}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\left(\frac{\partial AM_2}{\partial\beta} - \frac{\partial A}{\partial\beta}M_1 + \frac{\partial BH_{12}}{\partial\alpha} + \frac{\partial B}{\partial\alpha}H_{12}\right)\Big]\Big\}. \end{aligned} \tag{37}$$

В условии (37) слагаемое пропорциональное Ω описывает повышение разности химических потенциалов вакансий и атомов в связи с наличием нормальной нагрузки на поверхности. Действительно, для того чтобы новые атомы вышли на поверхность и вследствие этого элемент поверхности $d\Sigma$ диффузионным образом переместился в пространстве на величину $dw^{(д)}$ (рис. 3), необходимо затратить дополнительную работу dA^* против нормальных напряжений $\sigma_{\gamma\gamma}^{(2)}$ и усилий, и моментов в приповерхностном слое:

$$\begin{aligned} dA^* &= \left[\sigma_{\gamma\gamma}^{(2)} - (k_1N_1 + k_2N_2) + \frac{1}{AB}\chi(M_1, M_2, H_{12})\right]d\Sigma dw^{д}; \\ \chi(M_1, M_2, H_{12}) &\equiv \frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{A}\left(\frac{\partial BM_1}{\partial\alpha} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}M_2 + \frac{\partial AH_{12}}{\partial\beta} + \frac{\partial A}{\partial\beta}H_{12}\right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\left(\frac{\partial AM_2}{\partial\beta} - \frac{\partial A}{\partial\beta}M_1 + \frac{\partial BH_{12}}{\partial\alpha} + \frac{\partial B}{\partial\alpha}H_{12}\right). \end{aligned} \tag{38}$$

Поскольку общее число атомов в объеме $d\Sigma dw^{(д)}$ равно dn, то $d\Sigma dw^{(д)} = \Omega dn$, где Ω — атомный объем. Тогда дополнительное слагаемое в выражении для разности химических потенциалов будет таким:

$$\varphi = \frac{dA^*}{dn} = \Omega\left[\sigma_{\gamma\gamma}^{(2)} - (k_1N_1 + k_2N_2) + \frac{1}{AB}\chi(M_1,\ M_2,\ H_{12})\right], \tag{39}$$

и приходим к условию (37).

Из формул (30) с помощью соотношений (33) — (37) после некоторых преобразований получаем следующие обобщенные граничные условия:

$$\lambda_t\Delta t^{(1)} - \lambda_{e.\varphi}^{(1)}\left(1 + \frac{\mu_t}{H_t}\right)\frac{\partial t^{(1)}}{\partial\gamma} + \mu_t(t^{(2)} - t^{(1)}) =$$

$$= A_t\frac{\partial t^{(1)}}{\partial\tau} + B_t\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau} - R_t\frac{\partial\varkappa}{\partial\tau} + Q_t\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial\tau}; \tag{40}$$

$$\lambda_\varphi\Delta\left\{\varphi^{(1)} + \Omega\left[\sigma_{\gamma\gamma}^{(2)} - (k_1N_1 + k_2N_2) + \frac{1}{AB}\chi(M_1,\ M_2,\ H_{12})\right]\right\} -$$

$$- \lambda_{e.t}^{(1)}\left(1 + \frac{\mu_\varphi}{H_\varphi}\right)\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial\gamma} + \mu_\varphi\left\{\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)} + \Omega\left[\sigma_{\gamma\gamma}^{(2)} - (k_1N_1 + k_2N_2) +\right.\right.$$

$$\left.\left.+ \frac{1}{AB}\chi(M_1,\ M_2,\ H_{12})\right]\right\} = A_\varphi\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial\tau} + B_\varphi\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau} - R_\varphi\frac{\partial\varkappa}{\partial\tau} + Q_\varphi\frac{\partial t^{(1)}}{\partial\tau}. \tag{41}$$

Здесь $\lambda_t = 2h\lambda_{e.\varphi}^{(0)}$ — приведенная теплопроводность слоя; $\lambda_\varphi = 2h\lambda_{e.t}^{(0)}$ — приведенная массопроводность; $H_t = (2h)^{-1}\lambda_{e.\varphi}^{(0)}$ — приведенная теплопроницаемость; $H_\varphi = (2h)^{-1}\lambda_{e.t}^{(0)}$ — приведенная массопроницаемость; $A_t = 2h\omega_{e.\varphi}^{(0)}$ — приведенная теплоемкость; $A_\varphi = 2h\omega_{e.t}^{(0)}$ — приведенная массоемкость слоя; приведенные коэффициенты $B_t = \lambda_t d_{e.\varphi}^{(0)}$, $B_\varphi = \lambda_\varphi d_{e.t}^{(0)}$, $R_t = \lambda_t h d_{e.\varphi}^{(0)}$, $R_\varphi = \lambda_\varphi h d_{e.t}^{(0)}$, $Q_t = \lambda_t\gamma_\varphi^{(0)}$, $Q_\varphi = \lambda_\varphi\gamma_t^{(0)}$ характеризуют влияние перекрестных эффектов.

Таким образом, получены обобщенные граничные условия (29), (40) и (41) для механических и физических величин. Проанализируем их подробнее.

В безмоментном приближении уравнения равновесия (29) примут вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial BN_1}{\partial\alpha} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}N_2 + \frac{\partial AS_{12}}{\partial\beta} + \frac{\partial A}{\partial\beta}S_{12} = -AB(\sigma_{\alpha\gamma}^{(2)} - \sigma_{\alpha\gamma}^{(1)}),\\ \frac{\partial AN_2}{\partial\beta} - \frac{\partial A}{\partial\beta}N_1 + \frac{\partial BS_{12}}{\partial\alpha} + \frac{\partial B}{\partial\alpha}S_{12} = -AB(\sigma_{\beta\gamma}^{(2)} - \sigma_{\beta\gamma}^{(1)}),\\ k_1N_1 + k_2N_2 = \sigma_{\gamma\gamma}^{(2)} - \sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}.\end{gathered} \tag{42}$$

В работе [39] уравнение (29), а в статье [49] уравнение (42) трактовались как обобщение формулы Лапласа для жидкостей. Подставив в уравнения (42) $N_1 = \gamma_0 + N_1^*$, $N_2 = \gamma_0 + N_2$, получим

$$\begin{gathered}\frac{1}{A}\frac{\partial\gamma_0}{\partial\alpha} + \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial BN_1^*}{\partial\alpha} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}N_2^* + \frac{\partial AS_{12}}{\partial\beta} + \frac{\partial A}{\partial\beta}S_{12}\right) =\\ = -(\sigma_{\alpha\gamma}^{(2)} - \sigma_{\alpha\gamma}^{(1)}),\\ \frac{1}{B}\frac{\partial\gamma_0}{\partial\beta} + \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial AN_2^*}{\partial\beta} - \frac{\partial A}{\partial\beta}N_1^* + \frac{\partial BS_{12}}{\partial\alpha} + \frac{\partial B}{\partial\alpha}S_{12}\right) =\\ = -(\sigma_{\beta\gamma}^{(2)} - \sigma_{\beta\gamma}^{(1)}),\\ \gamma_0(k_1 + k_2) + k_1N_1^* + k_2N_2^* = \sigma_{\gamma\gamma}^{(2)} - \sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}.\end{gathered} \tag{43}$$

Если основной вклад в поверхностные усилия вносит величина γ_0, то придем к граничным условиям, предложенным Н. С. Фастовым [46]:

$$\begin{gathered}\frac{1}{A}\frac{\partial\gamma_0}{\partial\alpha} = -(\sigma_{\alpha\gamma}^{(2)} - \sigma_{\alpha\gamma}^{(1)}),\quad \frac{1}{B}\frac{\partial\gamma_0}{\partial\beta} = -(\sigma_{\beta\gamma}^{(2)} - \sigma_{\beta\gamma}^{(1)}),\\ \gamma_0(k_1 + k_2) = \sigma_{\gamma\gamma}^{(2)} - \sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}.\end{gathered} \tag{44}$$

Аналогичные условия для вязких жидкостей приведены в монографии [13].

В случае, когда γ_0 не зависит от координат на поверхности, из условий (44) следует формула Лапласа

$$\gamma_0 (k_1 + k_2) = \sigma_{\gamma\gamma}^{(2)} - \sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}. \tag{45}$$

В безмоментной теории при $N_1 = N_2 = \gamma_0$ граничное условие (41) перепишется в виде

$$\begin{gathered}\lambda_\varphi \Delta \{\varphi^{(1)} - \Omega [\sigma_{\gamma\gamma}^{(2)} - \gamma_0 (k_1 + k_2)]\} - \lambda_{e,t}^{(1)} \left(1 + \frac{\mu_\varphi}{H_\varphi}\right) \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \gamma} + \\ + \mu_\varphi \{\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)} + \Omega [\sigma_{\gamma\gamma}^{(2)} - \gamma_0 (k_1 + k_2)]\} = \\ = A_\varphi \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \tau} + B_\varphi \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + Q_\varphi \frac{\partial t^{(1)}}{\partial \tau}.\end{gathered} \tag{46}$$

Пренебрегая в условиях (40), (41) перекрестными эффектами и полагая $\Omega = 0$, приходим к условиям

$$\begin{gathered}\lambda_t \Delta t^{(1)} - \lambda_{e,\varphi}^{(1)} \left(1 + \frac{\mu_t}{H_t}\right) \frac{\partial t^{(1)}}{\partial \gamma} + \mu_t (t^{(2)} - t^{(1)}) = A_t \frac{\partial t^{(1)}}{\partial \tau}, \\ \lambda_\varphi \Delta \varphi^{(1)} - \lambda_{e,t}^{(1)} \left(1 + \frac{\mu_\varphi}{H_\varphi}\right) \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \gamma} + \mu_\varphi (\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}) = A_\varphi \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \tau}.\end{gathered} \tag{47}$$

Формулы (47) являются частным случаем граничных условий, полученных в статьях [36, 38] операторным методом при сохранении в разложении соответствующих операторов в ряды линейных членов. Перекрестные эффекты были учтены в работе [40].

При $\lambda_\varphi = \lambda_t = A_\varphi = A_t = 0$, $H_t = H_\varphi = \infty$ получим условия обмена по закону Ньютона

$$\lambda_{e,\varphi}^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial \gamma} = \mu_t (t^{(2)} - t^{(1)}), \qquad \lambda_{e,t}^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \gamma} = \mu_\varphi (\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}), \tag{48}$$

из которого при бесконечно больших коэффициентах тепло- и массоотдачи следуют граничные условия первого рода

$$t^{(1)} = t^{(2)}, \qquad \varphi^{(1)} = \varphi^{(2)}. \tag{49}$$

Известно, что поверхностная диффузия происходит на порядок интенсивнее объемной. Характерной особенностью граничных условий (40), (41), (46), (47) является то, что слагаемые, пропорциональные коэффициентам λ_t и λ_φ, описывают термодинамические потоки вдоль поверхности. На существование поверхностного диффузионного потока, связанного с поверхностным градиентом величины $\gamma_0 (k_1 + k_2)$, указывалось в работе [6].

Полагая в условии (46) $\lambda_\varphi = A_\varphi = B_\varphi = Q_\varphi = 0$, $H_\varphi = \infty$, приходим к граничному условию, предложенному И. М. Лифшицем [14]:

$$\lambda_{e,t}^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \gamma} = \mu_\varphi \{\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)} + \Omega [\sigma_{\gamma\gamma}^{(2)} - \gamma_0 (k_1 + k_2)]\}. \tag{50}$$

При бесконечно большом коэффициенте массоотдачи получается классическая формула Херринга [52, 53]

$$\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} + \Omega [\sigma_{\gamma\gamma}^{(2)} - \gamma_0 (k_1 + k_2)]. \tag{51}$$

В рассматриваемых условиях для механических величин усилия и моменты в приповерхностном слое вызывают в свободном от внешней нагрузки теле напряженно-деформированное состояние, которое для идеального упругого тела могло бы оказаться несущественным по сравнению с состоянием, определяемым другими причинами (внешней нагрузкой, неравномерностью температуры и т. д.). Ситуация резко меняется при рассмотрении тел с дефектами, например с вакансиями, в связи с неравновесностью процесса деформации. Несмотря на незначительные величины поверхностных усилий, последние вызывают развивающееся во времени движение дефектов, которое приводит к неупругим эффектам, обусловливает существенное изменение формы и перемещение граничных поверхностей.

В связи с переносом вещества при диффузии описанные выше граничные условия будут выполняться на подвижной границе (см. рис. 3). Закон сохранения массы дает дополнительное уравнение для определения движения поверхности. Поток массы $\vec{J}_m$ через поверхность $d\Sigma$ с единичной нормалью $\vec{n}$ за время $d\tau$ переносит количество вещества dm, определяемое формулой

$$dm = \rho^{(1)}\Omega\vec{J}_m \cdot \vec{n}d\Sigma d\tau, \qquad (52)$$

с другой стороны,

$$dm = \rho^{(1)}d\Sigma dw^{(д)}. \qquad (53)$$

Тогда

$$\frac{dw^{(д)}}{d\tau} = \rho^{(1)}\Omega\lambda_{e,t}^{(1)} \operatorname{grad} \varphi^{(1)} \cdot \vec{n} \qquad (54)$$

представляет собой уравнение для определения положения поверхности твердого тела при диффузии вакансий. В частности, для изменения радиуса сферической полости получим [5]

$$\frac{dR}{d\tau} = \rho^{(1)}\Omega\lambda_{e,t}^{(1)} \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial r}. \qquad (55)$$

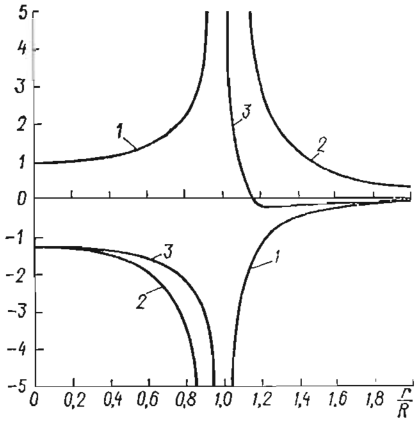

Рис. 4

Использование граничных условий (44) позволяет рассмотреть класс задач о напряженно-деформированном состоянии в твердых растворах в том случае, когда поверхностная энергия зависит от координат на поверхности [25]. В качестве примера рассмотрим твердое тело, занимающее полупространство $z \geqslant 0$, на границе которого в области $r > R$ поверхностная энергия равна γ_1, а в области $r < R$ — равна γ_2:

$$\gamma_0 = \gamma_2 + (\gamma_1 - \gamma_2) S(r - R), \qquad (56)$$

где $S(r - R)$ — функция скачка.

Такая ситуация может возникнуть, например, когда по поверхности чистого материала растеклась капля примеси.

В изотермических условиях при отсутствии внешней нагрузки и при установившемся режиме задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{gathered} G\nabla^2\vec{U} + (\lambda_{\varphi,t} + G) \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{U} = \beta_\varphi K_{\varphi,t} \operatorname{grad}\varphi, \\ \nabla^2\varphi = 0, \\ \sigma_{ij} = 2Ge_{ij} + (\lambda_{\varphi,t}e - \beta_\varphi K_{\varphi,t}\varphi)\,\delta_{ij}, \\ c = \omega_{e,t}\varphi + \frac{\beta_\varphi K_{\varphi,t}}{\rho} e \end{gathered} \qquad (57)$$

при таких краевых условиях:

$$z = 0: \quad \sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{rz} = -(\gamma_1 - \gamma_2)\,\delta(r - R), \quad \varphi = 0. \qquad (58)$$

Здесь $\delta(r - R)$ — δ-функция. Решение можно получить, используя преобразование Ханкеля по координате r. В частности, на границе полупространства

$$c = \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)(1 - 2\nu)\beta_\varphi K_{\varphi,t}}{GR\rho} f_1(r, R),$$

$$\sigma_{rr} = \frac{2(\gamma_1 - \gamma_2)}{R}[f_1(r, R) - (1 - \nu)f_2(r, R)], \qquad (59)$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta} &= \frac{2(\gamma_1-\gamma_2)}{R}\left[\nu f_1(r,\ R) + (1-\nu) f_2(r,\ R)\right];\\
f_1(r,\ R) &= \frac{R}{\pi}\left[\frac{1}{r+R}K(\psi) + \frac{1}{R-r}E(\psi)\right],\\
f_2(r,\ R) &= \frac{R}{\pi r^2}\left[\frac{r^2+R^2}{r+R}K(\psi) - (r+R)E(\psi)\right],
\end{aligned}
\qquad (60)
$$

где $K(\psi)$, $E(\psi)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода; $\psi = \frac{2\sqrt{rR}}{r+R}$.

На рис. 4 представлены графики безразмерных величин $\bar{c} = \frac{GR\rho}{(\gamma_2-\gamma_1)(1-2\nu)\beta_\varphi K_{\varphi,t}} c$ (кривая *1*), $\bar{\sigma}_{rr} = \frac{R}{\gamma_2-\gamma_1}\sigma_{rr}$ (кривая *2*), $\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{R}{\gamma_2-\gamma_1}\sigma_{\theta\theta}$ (кривая *3*) в зависимости от $\frac{r}{R}$ при $\nu = 0{,}25$.

Граничные условия (47) позволили более полно исследовать влияние поверхностных слоев на процессы диффузии, теплопроводности и деформации в твердых растворах [36—39]. Формулы (45) и (51) послужили основой при создании теории диффузионно-вязкого течения и спекания твердых тел [5, 14, 22, 47, 51, 54]. Модельная задача о диффузионном заплывании сферической поры в твердом растворе [5, 7, 20, 23, 24] в математическом аспекте представляет собой задачу типа Стефана, т. е. задачу с граничными условиями, заданными на неизвестной подвижной границе (см. формулу (55)).

Таким образом, описанные обобщенные граничные условия позволяют с физической точки зрения расширить класс описываемых явлений, а с математической — рассмотреть ряд новых краевых задач.

1. *Алумяэ Н. А.* Теория упругих оболочек и пластинок.— В кн.: Механика в СССР за 50 лет. М. : Наука, 1972, т. 3, с. 227—266.
2. *Векуа И. Н.* Об одном направлении построения теории оболочек.— В кн.: Механика в СССР за 50 лет. М. : Наука, 1972, т. 3, с. 267—290.
3. *Власов В. З.* Общая теория оболочек.— М. : Гостехиздат, 1949.— 784 с.
4. *Ворович И. И.* Общие проблемы теории пластин и оболочек.— В кн.: Тр. VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. М. : Наука, 1966, с. 896—903.
5. *Гегузин Я. Е.* Физика спекания.— М. : Наука, 1967.— 360 с.
6. *Гегузин Я. Е., Кривоглаз М. А.* Движение макроскопических включений в твердых телах.— М. : Металлургия, 1971.— 344 с.
7. *Гегузин Я. Е., Лифшиц И. М.* О механизме и кинетике «залечивания» изолированной поры в кристаллическом теле.— ФТТ, 1962, **4**, № 5, с. 1326—1333.
8. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек.— М. : Наука, 1976.— 512 с.
9. *Даниловская В. И.* Приближенное решение задачи о нестационарном тепловом температурном поле в тонкой оболочке произвольной формы.— Изв. АН СССР. ОТН, 1957, № 9, с. 157—158.
10. *Де Гроот С. Р., Мазур П.* Неравновесная термодинамика.— М. : Мир, 1964.— 456 с.
11. *Дьярмати И.* Неравновесная термодинамика.— М. : Мир, 1974.— 304 с.
12. *Кильчевский Н. А., Издебская Г. А., Киселевская Л. М.* Лекции по аналитической механике оболочек.— Киев : Вища школа, 1974.— 232 с.
13. *Ландау Л. Д., Лифшиц И. М.* Механика сплошных сред.— М. : Гостехиздат, 1954.— 788 с.
14. *Лифшиц И. М.* К теории диффузионно-вязкого течения поликристаллических тел.— ЖЭТФ, 1963, **44**, № 4, с. 1349—1367.
15. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости.— М. : Гостехиздат, 1955.— 492 с.
16. *Мотовиловець І. О.* Про виведення рівнянь теплопровідності пластини.— Прикл. механіка, 1960, **6**, № 3, с. 346—350.
17. *Підстригач Я. С.* Диференціальні рівняння задачі термодифузії в твердому деформованому ізотропному тілі.— Доп. АН УРСР, 1961, № 2, с. 169—172.
18. *Підстригач Я. С.* Умови теплового контакту твердих тіл.— Доп. АН УРСР, 1963, № 7, с. 872—874.
19. *Підстригач Я. С., Павлина В. С.* Загальні співвідношення термодинаміки твердих розчинів.— УФЖ, 1961, **6**, № 5, с. 655—663.
20. *Підстригач Я. С., Повстенко Ю. З.* Розрахунок нестаціонарного процесу дифузійного запливання сферичної пори в твердому тілі.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1975, № 6, с. 527—530.

21. *Підстригач Я. С., Ярема С. Я.* Температурні напруження в оболонках.— К. : Вид-во АН УРСР, 1961.— 212 с.
22. *Пинес Б. Я.* О спекании (в твердой фазе).— ЖТФ, 1946, **16**, № 6, с. 737—743.
23. *Пинес Б. Я.* Спекание, крип, отдых, рекристаллизация и другие явления, обусловленные самодиффузией в кристаллических телах.— УФН, 1954, **52**, № 4, с. 501—559.
24. *Повстенко Ю. З.* Влияние поверхностных явлений на поведение дефектов в деформируемом твердом теле : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Львов, 1977.— 16 с.
25. *Повстенко Ю. З.* Влияние неоднородности распределения поверхностной энергии на напряженное состояние в упругом полупространстве.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1979, вып. 9, с. 84—87.
26. *Подстригач Я. С.* Некоторые общие вопросы термоупругости и теплопроводности тонких оболочек.— В кн.: Тр. 2-й Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Киев, 1962, с. 147—152.
27. *Подстригач Я. С.* Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя.— ИФЖ, 1963, **6**, № 10, с. 129—136.
28. *Подстригач Я. С.* Диффузионная теория деформации изотропной сплошной среды.— Вопр. механики реал. твердого тела, 1964, вып. 2, с. 71—99.
29. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинах.— Киев : Наук. думка, 1972.— 302 с.
30. *Подстригач Я. С., Павлина В. С.* Дифференциальные уравнения термодинамических процессов в n-компонентном твердом растворе.— ФХММ, 1965, № 4, с. 383—389.
31. *Подстригач Я. С., Столяров В. А.* Матрично-операторный метод решения краевых задач для систем уравнений теории упругости.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 2, с. 3—18.
32. *Подстригач Я. С., Чернуха Ю. А.* Об уравнениях теплопроводности для тонкостенных элементов конструкций.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 2, с. 54—59.
33. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Квазистатическая задача термоупругости.— Прикл. механика, 1969, **5**, № 1, с. 43—51.
34. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек.— Киев : Наук. думка, 1978.— 344 с.
35. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н., Павлина В. С.* Квазистатическая задача термодиффузии для деформируемых твердых тел.— Прикл. механика, 1971, **7**, № 12, с. 11—16.
36. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* О влиянии поверхностных слоев на процесс диффузии и на обусловленное им напряженное состояние в твердых телах.— ФХММ, 1967, № 5, с. 575—583.
37. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* О напряженно-деформированном состоянии нагреваемых упругих тел, содержащих включения в виде тонких оболочек.— Прикл. механика, 1967, **3**, № 6, с. 8—16.
38. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* Температурные поля и напряжения в телах с тонкими покрытиями.— Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1967, вып. 7, с. 227—233.
39. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* Влияние тонких покрытий и промежуточных слоев на диффузионные процессы и на напряженное состояние в твердых телах.— Пробл. прочности, 1970, № 11, с. 37—40.
40. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р., Онуфрик Т. М., Повстенко Ю. З.* Поверхностные явления в твердых телах с учетом взаимосвязи физико-механических процессов.— ФХММ, 1975, № 2, с. 36—43.
41. *Седов Л. И.* Введение в механику сплошной среды.— М. : Физматгиз, 1962.— 284 с.
42. *Седов Л. И.* Математические методы построения новых моделей сплошных сред.— Успехи мат. наук, 1965, 20, № 5, с. 121—180.
43. *Седов Л. И.* Модели сплошных сред с внутренними степенями свободы.— Прикл. математика и механика, 1968, 32, № 5, с. 771—785.
44. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды.— М. : Наука, 1970.— Т. 1. 492 с.
45. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды.— М. : Наука, 1970.— Т. 2. 568 с.
46. *Фастов Н. С.* Влияние поверхностной энергии на поле упругих напряжений вблизи макродефектов структуры твердых тел.— Пробл. металловедения и физики металлов, 1958, вып. 5, с. 600—603.
47. *Френкель Я. И.* Вязкое течение в кристаллических телах.— ЖЭТФ, 1946, **16**, № 1, с. 29—38.
48. *Швец Р. Н., Раврик М. С.* К теории термодиффузии деформируемых тонких оболочек и пластин.— Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1972, вып. 12, с. 141—147.
49. *Ghez R.* Equilibre méchanique et de forme de petits cristaux.— Helv. phys. acta, 1968, **41**, N 3, p. 287—309.
50. *Green A. E., Naghdi P. M., Wainwright W. L.* A general theory of a Cosserat surface.— Arch. Ration Mech. and Anal., 1965, **20**, N 4, p. 287—308.
51. *Herring C.* Diffusional viscousity of polycristalline solid.— J. Appl. Phys., 1950, **21**, N 5, p. 437—445.
52. *Herring C.* Surface tension as a motivation for sintering.— In: The physics of powder metallurgy. New York : McGraw — Hill, 1951, p. 143—179.
53. *Herring C.* The use of classical macroscopic concepts in surfaceenergy problem.— In: Structure and properties of solid surfaces. Chicago : The Univ. of Chicago Press, 1953, p. 5—81.
54. *Nabarro F. R. N.* Deformation of cristals by the motion of syngle ions.— In: Reports of conference on strength of solids. London : Phys. Soc., 1948, p. 75—90.

55. *Vermaak J. S., Mays C. W., Kuhlmann-Wilsdorf D.* On surface stress and surface tension.— Surface Sci., 1968, N 12, p. 128—133.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
21.03.79

УДК 517.956.223

И. В. Коробчук

О ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧЕ НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Пусть S — достаточно гладкая замкнутая поверхность в n-мерном пространстве E^n, диффеоморфная $(n-1)$-мерной сфере S^{n-1}; D_l — область, ограниченная поверхностью S и содержащая бесконечность $D_i = E^n \setminus D_l$. Поверхность S принадлежит классу $A^{(2)}$, т. е. удовлетворяет таким условиям:

1) ее можно покрыть конечным числом областей, в каждой из которых координаты текущей точки $x \in S$ допускают параметрическое представление

$$x_i = x_i(t_1, \ldots, t_{n-1}) \qquad (i = \overline{1, n}),$$

где функции x_i определены в ограниченной области Ω изменения переменных $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$;

2) функции x_i осуществляют взаимно однозначное соответствие между замкнутым множеством $\Omega \cup \partial\Omega$ и соответствующей частью S, причем $x_i \in C^{(2)}_{[\Omega \cup \partial\Omega]}$;

3) выражение

$$J = \left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial(x_{k+1}, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{k-1})}{\partial(t_1, \ldots, t_{n-1})}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} > 0;$$

4) направляющие косинусы внешней нормали $\vec{n}$ к поверхности S задаются формулой

$$\cos(\widehat{n, x_k}) = \frac{1}{J}\,\frac{\partial(x_{k+1}, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{k-1})}{\partial(t_1, \ldots, t_{n-1})}.$$

Рассмотрим вопрос о разрешимости в области D_l задачи

$$\Delta u + \omega^2 u = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} + \sigma u|_S = f, \tag{2}$$

решение которой удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда при $r \to \infty$:

$$\frac{\partial u}{\partial r} - i\omega u = e^{i\omega r} O\left(r^{-\frac{n-1}{2}}\right), \quad \operatorname{Im}\omega \geqslant 0, \tag{3}$$

где $\omega = \alpha + i\beta$ — комплексный параметр; $\bar{l}$ — гладкое векторное поле на S такое, что $\cos(\widehat{n, l}) > 0$, $\sigma(M)$; $f(M)$ — достаточно гладкие функции на S, причем $\operatorname{Im}\sigma(M) \equiv 0$.

Теорема 1. Если $\bar{l} \in C^{(1)}_{[S]}$, $\sigma(M) \in C_{[S]}$ и существуют в области D_l действительные непрерывные ограниченные функции $B_k(x)$ $(k = \overline{1, n})$ с кусочно-непрерывными производными $\frac{\partial B_k}{\partial x_k}$ такие, что выполняются неравен-