номиальных матриц, полускалярно эквивалентными преобразованиями приводятся к матрицам $F(x)$ и $G(x)$, имеющим одну и ту же K-форму, и $F(x) = G(x)$.

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М. : Наука, 1966.— 576 с.
2. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.*— В кн.: Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. К. : Наук. думка, 1977, с. 61—66.
3. *Ланкастер П.* Теория матриц.— М. : Наука, 1978.— 280 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 28.09.79

УДК 517.524

Д. И. Боднар

НЕОБХОДИМЫЙ И ДОСТАТОЧНЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Произвольную ветвящуюся цепную дробь с положительными компонентами с использованием эквивалентных преобразований, т. е. преобразований, не изменяющих величин подходящих дробей, можно привести к виду [5]

$$b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1 \mid}{\mid b_{i_1 i_2 \ldots i_k}} . \tag{1}$$

При $N = 1$ эта дробь вырождается в обычную цепную дробь

$$b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \mid}{\mid b_k} , \tag{2}$$

вопрос о сходимости которой полностью решается необходимым и достаточным критерием Зейделя [5].

Теорема Зейделя. Цепная дробь (2) с положительными компонентами сходится тогда и только тогда, когда ряд Σb_k расходится.

В работе [1] доказан признак сходимости ветвящейся цепной дроби (1), эквивалентный достаточности теоремы Зейделя в случае $N = 1$, в работе [4] установлена теорема, эквивалентная необходимости признака Зейделя, которая формулируется так.

Теорема 1. Ветвящаяся цепная дробь (1) с положительными компонентами расходится, если ряд $\Sigma\beta_k$ сходится, где $\beta_k = \max\limits_{i_1 i_2 \ldots i_k} b_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ — максимальный элемент дроби (1) на k-м этаже.

Нам понадобится также следующее утверждение [3].

Теорема 2. Ветвящаяся цепная дробь (1) с положительными компонентами сходится, если

$$\lim_{p \to \infty} \sum_{k=1}^{2p} \alpha_k \left(\alpha_{k+1} + \frac{N \mid}{\mid \beta_{k+2}} + \frac{N \mid}{\mid \alpha_{k+3}} + \cdots + \frac{N \mid}{\mid \alpha_{2p-k+2\left[\frac{k}{2}\right]+1}} \right) = \infty, \tag{3}$$

где $\alpha_k = \min\limits_{i_1 i_2 \ldots i_k} b_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, $\beta_k = \max\limits_{i_1 i_2 \ldots i_k} b_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ — минимальный и максимальный элементы дроби (1) на k-м этаже; N — число ветвлений.

Следствие. При выполнении условий теоремы 2 ветвящаяся цепная дробь (1) сходится, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty \tag{4}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left(\alpha_{k+1} + \frac{N \mid}{\mid \beta_{k+2}} + \frac{N \mid}{\mid \alpha_{k+3}} + \cdots \right) = \infty. \tag{5}$$

Докажем это следствие. Условие (4) в силу теоремы Зейделя является достаточным для того, чтобы члены ряда (5) имели смысл. Покажем, что условие (5) эквивалентно условию (3) теоремы 2. Для этого введем сокращенные обозначения:

$$r_k = \alpha_k + \frac{N \mid}{\mid \beta_{k+1}} + \frac{N \mid}{\mid \alpha_{k+2}} + \frac{N \mid}{\mid \beta_{k+3}} + \cdots, \tag{6}$$

$$\rho_k = \beta_k + \frac{N \mid}{\mid \alpha_{k+1}} + \frac{N \mid}{\mid \beta_{k+2}} + \frac{N \mid}{\mid \alpha_{k+3}} + \cdots, \tag{7}$$

$$r_k(p) = \alpha_k + \frac{N \mid}{\mid \beta_{k+1}} + \frac{N \mid}{\mid \alpha_{k+2}} + \cdots + \frac{N \qquad \mid}{\mid \alpha_{2p+2\left[\frac{k}{2}\right]-k+1}}, \tag{8}$$

$$\rho_k(p) = \beta_k + \frac{N \mid}{\mid \alpha_{k+1}} + \frac{N \mid}{\mid \beta_{k+2}} + \cdots + \frac{N \qquad \mid}{\mid \beta_{2p+2\left[\frac{k}{2}\right]-k+1}}, \tag{9}$$

где $\left[\frac{k}{2}\right]$ — целая часть числа $k/2$. Из расходимости ряда (5) следует, что для произвольного индекса k_0 и константы $L > 0$ существует индекс n_0, такой, что $\sum\limits_{s=k_0}^{n_0} \alpha_{s-1} \cdot r_s \geqslant L$. Из сходимости дробей r_k следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует номер p такой, что

$$\alpha_{s-1}(r_s - r_s(p)) < \varepsilon \qquad (s = k_0,\ k_0 + 1,\ \ldots,\ n_0).$$

Таким образом,

$$\sum_{s=k_0}^{n_0} \alpha_{s-1} r_s(p) = \sum_{s=k_0}^{n_0} \alpha_{s-1} r_s - \sum_{s=k_0}^{n_0} \alpha_{s-1}(r_s - r_s(p)) \geqslant L - \varepsilon(n_0 - k_0) \geqslant \frac{L}{2},$$

если ε достаточно малое. Следовательно, выполняется условие (3). Наоборот, для выполнения условия (3) необходимо, чтобы выполнялось условие (5), так как

$$\sum_{k=1}^{2p} \alpha_k r_{k+1}(p) =$$

$$= \sum_{k=1}^{2p} \alpha_k \left(\alpha_{k+1} + \frac{N \mid}{\mid \beta_{k+2}} + \frac{N \mid}{\mid \alpha_{k+3}} + \cdots + \frac{N \qquad \mid}{\mid \alpha_{2p+2\left[\frac{k}{2}\right]-k+1}} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{2p} \alpha_k \left(\alpha_{k+1} + \frac{N \mid}{\mid 0} + \frac{N \mid}{\mid \alpha_{k+3}} + \frac{N \mid}{\mid 0} + \cdots + \frac{N \qquad \mid}{\mid \alpha_{2p+2\left[\frac{k}{2}\right]-k+1}} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{2p} \alpha_k \left(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+3} + \cdots + \alpha_{2p+2\left[\frac{k}{2}\right]-k+1} \right).$$

Поэтому члены ряда (5) имеют смысл. Все остальное следует из свойств вилки, так как $r_s(p) < r_s$. Следствие доказано.

Теорема 3. Если для ветвящейся цепной дроби (1) с положительными членами существует константа $M > 0$ такая, что

$$\beta_k \leqslant M\alpha_{k+1}, \quad \beta_{k+1} \leqslant M\alpha_k \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{10}$$

то эта дробь сходится тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k = \infty,$$

где (11)

$$\alpha_k = \min_{i_1 i_2 \ldots i_k} b_{i_1 i_2 \ldots i_k}; \quad \beta_k = \max_{i_1 i_2 \ldots i_k} b_{i_1 i_2 \ldots i_k}.$$

Доказательство. Условие (11) является необходимым признаком сходимости дроби (1) даже без каких-либо дополнительных ограничений (см. теорему 1). Остается доказать достаточность. Для этого понадобится такая лемма [2].

Лемма. Пусть

$$\alpha_0 = b_0 + \sum_{k=1}^{m} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1 \ \ |}{|\, b_{i_1 i_2 \ldots i_k}} \tag{12}$$

ветвящаяся цепная дробь с положительными членами. При вычислении b_0, $b_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ $(1 \leqslant i_k \leqslant N;\ k = \overline{1, m})$ допущены относительные погрешности δ_0, $\delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}$. Если $\hat{b}_0 > 0$, $\hat{b}_{i_1 i_2 \ldots i_k} > 0$ — приближенные значения b_0 и $b_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ соответственно, то абсолютная величина относительной погрешности при вычислении дроби (12) не превышает величины

$$\max_{s} \max_{i_1 i_2 \ldots i_{2s+1}} \left(|\delta_{i_1 i_2 \ldots i_{2s}}|,\ \left| \frac{\delta_{i_1 i_2 \ldots i_{2s+1}}}{1 + \delta_{i_1 i_2 \ldots i_{2s+1}}} \right| \right), \tag{13}$$

причем $\delta_{i_0} = \delta_0$.

Продолжим доказательство теоремы 3. Рассмотрим два возможных случая (см. обозначения (6)):

$$\text{а)}\ \varliminf_{k \to \infty} r_k = \alpha > 0, \quad \text{б)}\ \varliminf_{k \to \infty} r_k = 0.$$

В случае а) последовательность r_k, имеющая смысл в силу условия (11) и теоремы Зейделя, ограничена снизу, т. е. существует константа $a > 0$ такая, что $r_k \geqslant a$. Учитывая условие (10), заключаем, что расходимость ряда $\Sigma\beta_k$ эквивалентна расходимости ряда $\Sigma\alpha_k$. А из ограниченности снизу последовательности r_k и расходимости ряда $\Sigma\alpha_k$ следует выполнение условия (5). Поэтому в силу следствия ветвящаяся цепная дробь (1) сходится. В случае б) существует подпоследовательность r_{k_n}, стремящаяся к нулю при $n \to \infty$. Но тогда для произвольного достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует номер n_0 такой, что для всех $n \geqslant n_0$ справедливо неравенство $r_{k_n} < \varepsilon$. Рассмотрим последовательность ρ_k (см. обозначения (7)). Так как

$$r_{k_n} = \alpha_{k_n} + \frac{N}{\rho_{k_n+1}}, \quad \text{то} \quad \lim_{n \to \infty} \rho_{k_n+1} = \infty,$$

и, следовательно, для произвольной положительной достаточно большой константы K существует номер n_1 такой, что для всех $n \geqslant n_1$ справедливо неравенство $\rho_{k_n+1} \geqslant K$. Пусть $n_2 = \max\ (n_0, n_1)$, $k_{n_2} = s$, тогда для всех $n \geqslant n_2$ имеем

$$|\rho_{k_n+1} - r_{k_n}| \geqslant K - \varepsilon.$$

Используя эквивалентные преобразования, приведем обычные цепные дроби (6) и (7) к дробям с частными числителями равными единице:

$$r_k = \alpha_k + \frac{1 \ \ |}{|\, \beta_{k+1} N^{-1}} + \frac{1 \ \ |}{|\, \alpha_{k+2}} + \frac{1 \ \ |}{|\, \beta_{k+3} N^{-1}} + \cdots,$$

$$\rho_k = \beta_k + \frac{1 \ \ |}{|\, \alpha_{k+1} N^{-1}} + \frac{1 \ \ |}{|\, \beta_{k+2}} + \frac{1 \ \ |}{|\, \alpha_{k+3} N^{-1}} + \cdots$$

Их подходящие дроби четного порядка (см. выражения (8), (9)) будем обозначать через $r_k(p)$ и $\rho_k(p)$ соответственно.

В силу сходимости дробей (6) и (7) для уже выбранных $\varepsilon > 0$ и номера s существует индекс p такой, что

$$r_s - r_s(p) < \varepsilon \quad \text{и} \quad \rho_s - \rho_s(p) < \varepsilon.$$

Учитывая утверждение леммы, где $N = 1$, α_s, $\beta_{s+1}N^{-1}$, α_{s+2}, ... — точные, а β_{s+1}, $\alpha_{s+2}N^{-1}$, β_{s+3}, ... — их приближенные значения, и условия (10) теоремы 3, получаем

$$|r_s(p) - \rho_{s+1}(p)| \leqslant r_s(p) \max_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2p \\ 1\leqslant m\leqslant 2p-1}} \left\{ \left| \frac{\beta_{s+1+k} - \alpha_{s+k}}{\alpha_{s+k}} \right|, \right.$$

$$\left. \left| \frac{(\alpha_{s+m+1}N^{-1} - \beta_{s+m}N^{-1})/\beta_{s+m}N^{-1}}{1 + (\alpha_{s+m+1}N^{-1} - \beta_{s+m}N^{-1})/\beta_{s+m}N^{-1}} \right| \right\} \leqslant \varepsilon (M + 1).$$

Таким образом,

$$K - \varepsilon \leqslant |\rho_{s+1} - r_s| \leqslant (r_s - r_s(p)) + (\rho_{s+1} - \rho_{s+1}(p)) +$$
$$+ |r_s(p) - \rho_{s+1}(p)| \leqslant 2\varepsilon + \varepsilon(M + 1) = \varepsilon(M + 3),$$

что невозможно для произвольных достаточно малых ε и достаточно больших K. Из полученного противоречия следует, что случай б) в предположениях теоремы 3 не имеет места. Теорема 3 доказана.

Замечание. Как видно из доказательства теоремы, условие (10) существенно используется только в том случае, если $\underline{\lim}_{k\to\infty} \alpha_k = 0$. Если же $\overline{\lim}_{k\to\infty} \alpha_k > 0$, то условия (4), (5) следствия гарантируют сходимость ветвящейся цепной дроби (1).

1. *Боднар Д. И.* Об одном обобщении признака сходимости Зейделя для ветвящихся цепных дробей.— В кн.: Математический сборник. Киев : Наук. думка, 1976, с. 44—47.
2. *Боднар Д. И.* Исследование сходимости одного класса ветвящихся цепных дробей.— В кн.: Цепные дроби и их применение. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1976, с. 41—44.
3. *Боднар Д. И.* Достаточные признаки сходимости ветвящихся цепных дробей с положительными компонентами.— В кн.: Материалы V конф. молодых ученых Льв. фил. мат. физики Ин-та математики АН УССР. Секция математики и мат. методов. Львов, 1978, с. 3—6.— Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 1846—79 Деп.
4. *Боднар Д. И.* Необходимый признак сходимости ветвящихся цепных дробей с положительными компонентами.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1979, вып. 10, с. 15—19.
5. *Боднарчук П. І., Скоробогатько В. Я.* Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування.— К. : Наук. думка, 1974.— 271 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
22.06.79

УДК 532.72 : 624.043

Ю. З. Повстенко

УЧЕТ ПОВЕРХНОСТНОЙ ЭНЕРГИИ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Одним из основных направлений развития фундаментальных исследований в области механики деформируемого твердого тела является расширение свойств механических моделей путем учета различного рода немеханических форм движения. Такое расширение свойств теоретических моделей требует введения дополнительных параметров состояния, для определения которых необходимо получить дополнительные уравнения, описывающие конкретные процессы. Общий подход к построению континуальных моделей с расширенными физико-механическими свойствами разработан Л. И. Седовым [41, 42].

В работе [17] (см. также последующие работы [19, 28, 30]) методами механики сплошной среды и термодинамики необратимых процессов получена линейная система дифференциальных уравнений, описывающая физико-механическое состояние двухкомпонентного твердого раствора с учетом