УДК 512.8

Б. З. Шаваровский

ПОЛНАЯ СИСТЕМА ИНВАРИАНТОВ МАТРИЦЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА ОТНОСИТЕЛЬНО ПОЛУСКАЛЯРНО ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В данной статье показано, как с помощью полускалярно эквивалентных преобразований квадратные полиномиальные матрицы второго порядка приводятся к более простым формам, и решен вопрос о подобии произвольных наборов числовых матриц строения 2×2. Пусть $A(x)$ — полиномиальная 2×2-матрица над кольцом $\mathbf{C}[x]$ и $\deg \det A(x) > 0$. С помощью упомянутых преобразований [2] приведем ее к виду

$$UA(x)V(x) = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1(x) & 0 \\ \varepsilon_1(x)\, a_1(x) & \varepsilon_2(x) \end{Vmatrix} = A_1(x), \tag{1}$$

где $\varepsilon_1(x)$, $\varepsilon_2(x)$ — инвариантные множители матрицы $A(x)$ и $\deg(\varepsilon_1(x) \times a_1(x)) < \deg \varepsilon_2(x)$. В дальнейшем, где это не оговорено, будем считать, что $a_1(x) \neq \mathrm{const}$, т. е. матрица $A(x)$ полускалярно эквивалентными преобразованиями к форме Смита не приводится.

Для удобства последующих изложений частное от деления полиномов $\varepsilon_2(x)$ и $\varepsilon_1(x)$ обозначаем через $\delta(x)$. Очевидно, что $\deg \delta(x) > 0$. Множество всех корней полинома $\delta(x)$ обозначим через M_δ : $M_\delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ $(n \geqslant 1)$. Кратности корней α_i, $i = 1, \ldots n$, полинома $\delta(x)$ обозначим через k_i, а кратности этих же корней в полиноме $a_1^{(1)}(x)$ (первая производная полинома $a_1(x)$) — через $\bar{k}_i$ (возможно, что некоторые из $\bar{k}_i$ равны нулю). Введем еще такие обозначения: $k_i' = \bar{k}_i + 1$, $i = 1, \ldots, n$. Множество M_δ можно разбить на непересекающиеся подмножества N_u, $u = 1, \ldots, v$, на каждом из которых полином $a_1(x)$ из матрицы (1) принимает некоторое значение β_u, причем $\beta_j \neq \beta_l$ при $j \neq l$, $1 \leqslant j$, $l \leqslant v$.

Теорема 1. Числа $m_i = \min(k_i, k_i')$, $i = 1, \ldots, n$, и подмножества N_u, $u = 1, \ldots, v$, относительно полускалярно эквивалентных преобразований определяются матрицей $A(x)$ однозначно.

Прежде чем доказывать эту теорему, сформулируем следующую лемму.

Лемма 1. Если матрицы

$$A_1(x) = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1(x) & 0 \\ \varepsilon_1(x)\, a_1(x) & \varepsilon_2(x) \end{Vmatrix}, \quad A_2(x) = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1(x) & 0 \\ \varepsilon_1(x)\, a_2(x) & \varepsilon_2(x) \end{Vmatrix} \tag{2}$$

вида (1) полускалярно эквивалентны и полиномы $a_1(x)$, $a_2(x)$, $\delta(x)$ имеют общий корень, то $(a_1(x), \delta(x)) = (a_2(x), \delta(x))$, где $(a_j(x), \delta(x))$ — наибольший общий делитель (НОД) полиномов $a_j(x)$, $\delta(x)$, $j = 1, 2$.

Доказательство этой леммы будет дано при доказательстве теоремы 4.

Доказательство теоремы 1. Пусть матрицы (2) полускалярно эквивалентны. Если $\alpha_i \in M_\delta$ является общим корнем полиномов $a_1(x)$, $a_2(x)$, то согласно лемме 1 $(a_1(x), \delta(x)) = (a_2(x), \delta(x))$ и первая часть теоремы доказана. Если α_i не является общим корнем полиномов $a_1(x)$, $a_2(x)$, то существуют числа γ_1, γ_2 такие, что в матрицах

$$\tilde{A}_1(x) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \gamma_1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \varepsilon_1(x) & 0 \\ \varepsilon_1(x)\, a_1(x) & \varepsilon_2(x) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1(x) & 0 \\ \varepsilon_1(x)\tilde{a}_1(x) & \varepsilon_2(x) \end{Vmatrix},$$

$$\tilde{A}_2(x) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \gamma_2 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \varepsilon_1(x) & 0 \\ \varepsilon_1(x)\, a_2(x) & \varepsilon_2(x) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1(x) & 0 \\ \varepsilon_1(x)\, \tilde{a}_2(x) & \varepsilon_2(x) \end{Vmatrix}$$

полиномы $\tilde{a}_1(x) = a_1(x) + \gamma_1$, $\tilde{a}_2(x) = a_2(x) + \gamma_2$ имеют общий корень α_i. Рассуждая как и выше, получаем, что $(\tilde{a}_1(x), \delta(x)) = (\tilde{a}_2(x), \delta(x))$, откуда следует справедливость первой части теоремы.

Допустим теперь вопреки требованию теоремы, что для некоторых α_j, $\alpha_l \in M_\delta$ в матрицах (2) $a_1(\alpha_j) = a_1(\alpha_l)$ и $a_2(\alpha_j) \neq a_2(\alpha_l)$. Тогда существуют числа ξ_1, ξ_2 такие, что в матрицах

$$\hat{A}_1(x) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \xi_1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \varepsilon_1(x) & 0 \\ \varepsilon_1(x)\, a_1(x) & \varepsilon_2(x) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1(x) & 0 \\ \varepsilon_1(x)\, \hat{a}_1(x) & \varepsilon_2(x) \end{Vmatrix},$$

$$\hat{A}_2(x) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \xi_2 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \varepsilon_1(x) & 0 \\ \varepsilon_1(x)\, a_2(x) & \varepsilon_2(x) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1(x) & 0 \\ \varepsilon_1(x)\, \hat{a}_2(x) & \varepsilon_2(x) \end{Vmatrix}$$

полиномы $\hat{a}_1(x) = a_1(x) + \xi_1$, $\hat{a}_2(x) = a_2(x) + \xi_2$ удовлетворяют условиям $\hat{a}_1(\alpha_j) = \hat{a}_1(\alpha_l) = \hat{a}_2(\alpha_j) = 0$, $\hat{a}_2(\alpha_l) \neq 0$, что противоречит лемме 1. Теорема 1 доказана.

В связи с приведением матрицы $A(x)$ к виду (1) и установленными теоремой 1 некоторыми инвариантами такого приведения множество квадратных матриц второго порядка над $\mathbf{C}[x]$ разобьем на следующие классы матриц, в которых 1) $k'_{i_1} < \frac{k_{i_1}}{2}$ для некоторого $\alpha_{i_1} \in M_\delta$; 2) $k'_i \geqslant \frac{k_i}{2}$, $i = 1, \ldots, n$, и полином $a_1(x)$ из матрицы (1) принимает равные значения на множестве M_δ; 3) $k'_i \geqslant \frac{k_i}{2}$, $i = 1, \ldots, n$, для некоторого $\alpha_{i_1} \in M_\delta$ $k'_{i_1} < k_{i_1}$ и полином $a_1(x)$ принимает на множестве M_δ по крайней мере два различных значения; 4) $k'_i \geqslant k_i$, $i = 1, \ldots, n$, и на множестве M_δ полином $a_1(x)$ принимает точно два различных значения; 5) $k'_i \geqslant k_i$, $i = 1, \ldots, n$, и на множестве M_δ полином $a_1(x)$ принимает больше чем два различных значения и 6) матрицы, приводимые к форме Смита полускалярно эквивалентными преобразованиями. Обозначим эти классы соответственно через $H_1, \ldots, H_6$. Легко видеть, что они не пересекаются и множество 2×2-матриц над $\mathbf{C}[x]$ исчерпывается ими полностью. Нетрудно убедиться, что полиномиальные матрицы, характеристические числа для которых равны, могут принадлежать к H_1, H_2 или H_6, а для которых попарно различны — к H_4, H_5 или H_6. К H_3 принадлежат только те матрицы, которые имеют кратные характеристические числа, причем существует по крайней мере два различных характеристических числа.

Теорема 2. Полускалярно эквивалентные матрицы принадлежат к одному и тому же классу.

Доказательство этой теоремы очевидно вследствие теоремы 1.

Определение 1. Будем говорить, что матрица $A_1(x)$ вида (1) полуориентированная в некоторой точке (α_t, α_p) декартова квадрата M_δ^2, если

$$a_1(\alpha_t) = 0, \quad a_1^{(n_p)}(\alpha_p) = n_p!,$$

где

$$n_p = \begin{cases} k'_p & \text{при } k'_p < k_p, \\ 0 & \text{при } k'_p \geqslant k_p. \end{cases} \tag{3}$$

Теорема 3. Существуют числовые неособенные матрицы P и Q, такие, что матрица

$$PA_1(x)\,Q = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1(x) & 0 \\ \varepsilon_1(x)\, a(x) & \varepsilon_2(x) \end{Vmatrix} = F(x) \tag{4}$$

полуориентирована в некоторой точке $(\alpha_t, \alpha_p) \in M_\delta^2$, причем $k'_p < k_p$ в случае принадлежности $A_1(x)$ к H_1, H_2 или H_3 и $a(\alpha_t) \neq a(\alpha_p)$ в случае принадлежности $A_1(x)$ к H_4 или H_5.

Доказательство. Если матрица $A_1(x)$ принадлежит к H_1, H_2 или H_3, то существует корень $\alpha_p \in M_\delta$ такой, что $k_p' < k_p$. Тогда в качестве P берем матрицу вида

$$P = \begin{Vmatrix} \dfrac{a_1^{(k_p')}(\alpha_p)}{k_p'!} & 0 \\ -a_1(\alpha_t) & 1 \end{Vmatrix},$$

где α_t — произвольный корень полинома $\delta(x)$ (возможно, $\alpha_t = \alpha_p$), а в качестве Q — матрицу

$$Q = \begin{Vmatrix} \dfrac{k_p'!}{(k_p')} & 0 \\ a_1(\alpha_p) & \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Легко убедиться, что при таком выборе P и Q матрица $F(x)$ в соотношении (4) полуориентированная в точке $(\alpha_t, \alpha_p) \in M_\delta^2$.

В случае, когда матрица $A_1(x)$ принадлежит H_4 или H_5, фиксируем элементы $\alpha_t, \alpha_p \in M_\delta$ такие, что $a_1(\alpha_t) \neq a_1(\alpha_p)$.

Положив в соотношении (4)

$$P = \begin{Vmatrix} a_1(\alpha_p) - a_1(\alpha_t) & 0 \\ -a_1(\alpha_t) & 1 \end{Vmatrix}, \quad Q = \begin{Vmatrix} (a_1(\alpha_p) - a_1(\alpha_t))^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

получим полуориентированную в точке $(\alpha_t, \alpha_p) \in M_\delta^2$ матрицу $F(x)$.

Из доказательства этой теоремы следует практический метод приведения произвольной матрицы $A_1(x)$ вида (1) к виду (4).

Через $\Delta_l(\mathcal{A})$, $l = 1, 2, \ldots$ будем обозначать последовательные главные миноры [1] порядка l матрицы $\mathcal{A}$ вида

$$\mathcal{A} = \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & & & & & \\ a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & & & & & & \\ & & & a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \\ 0 & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{Vmatrix}.$$

В дальнейшем будут использованы такие две леммы.

Лемма 2. Ранг матрицы

$$\begin{Vmatrix} a_0 - b_0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{k-1} - b_{k-1} & 0 \\ a_k - b_k & a_0 b_0 \\ a_{k+1} - b_{k+1} & a_0 b_1 + a_1 b_0 \\ \vdots & \vdots \\ a_m - b_m & a_0 b_{m-k+1} + \cdots + a_{m-k+1} b_0 \\ \vdots & \vdots \end{Vmatrix}, \tag{5}$$

где $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, равен единице тогда и только тогда, когда для матриц

$$\mathcal{A} = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & & & & \\ a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & & & & & \\ & & a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \\ 0 & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\|, \quad \mathcal{B} = \left\| \begin{matrix} b_1 & b_2 & \cdot & \cdot & & & & \\ b_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & & & & & \\ & & b_0 & b_1 & b_2 & \cdot & \cdot & \\ 0 & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\| \tag{6}$$

справедливы равенства

$$a_0 = b_0, \ \Delta_l(\mathcal{A}) = \Delta_l(\mathcal{B}), \ 0 < l < \infty, \ l \neq k.$$

Лемма 3. Ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} a_0 - b_0 & a_0 b_0 \\ a_1 - b_1 & a_0 b_1 + a_1 b_0 \\ \vdots & \vdots \\ a_m - b_m & a_0 b_m + \cdots + a_m b_0 \\ \vdots & \vdots \end{matrix} \right\|, \tag{7}$$

где $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, равен единице тогда и только тогда, когда для матриц (6) выполняются равенства $\bar{\Delta}_l(\mathcal{A}) = \bar{\Delta}_l(\mathcal{B})$, $l = 1, 2, \ldots$ Здесь $\bar{\Delta}_l(\mathcal{A}) = \frac{\Delta_l(\mathcal{A})}{a_0^{l+1}}$; $\bar{\Delta}_l(\mathcal{B}) = \frac{\Delta_l(\mathcal{B})}{b_0^{l+1}}$.

Доказательство леммы 2. Необходимость. Поскольку ранг матрицы (5) равен единице, то каждые две строки ее линейно зависимы и все миноры второго порядка, содержащие ненулевую $k+1$-ю строку, равны нулю. Из линейной зависимости этой строки с каждой из k первых строк следует, что $a_0 = b_0, \ldots, a_{k-1} = b_{k-1}$, откуда $\Delta_l(\mathcal{A}) = \Delta_l(\mathcal{B})$; $0 < l < k$. Если $a_k = b_k$, то из линейной зависимости $k+1$-й строки с каждой из последующих строк следует, что $a_{k+1} = b_{k+1}, \ldots, a_m = b_m, \ldots$ и доказывать нечего. Если $a_k \neq b_k$, то из равенства нулю минора, содержащего $k+1$-ю и $k+2$-ю строки, вытекает, что в матрицах (6) $\Delta_{k+1}(\mathcal{A}) = \Delta_{k+1}(\mathcal{B})$. Предполагаем по индукции, что из равенства нулю миноров матрицы (5), содержащих $k+1$-ю строку и одну из $m-k$ последующих строк, вытекает равенство $\Delta_l(\mathcal{A}) = \Delta_l(\mathcal{B})$, $k < l \leqslant m$. На основании индуктивного предположения из равенства нулю минора, содержащего $k+1$-ю и $m-k+1$-ю строки, получаем $\Delta_{m+1}(\mathcal{A}) = \Delta_{m+1}(\mathcal{B})$.

Доказательство достаточности проводится методом индукции аналогично доказательству первой части леммы.

Доказательство леммы 3. Необходимость. Так как каждые две строки матрицы (7) линейно зависимы, то все миноры второго порядка этой матрицы равны нулю. Очевидно, достаточно рассматривать только миноры, содержащие ненулевую первую строку. Из равенства нулю минора, содержащего первые две строки, следует, что $\bar{\Delta}_1(\mathcal{A}) = \bar{\Delta}_1(\mathcal{B})$. Предполагаем по индукции, что из равенства нулю миноров, которые содержат первую и одну из m последующих строк, следует, что $\bar{\Delta}_2(\mathcal{A}) = \bar{\Delta}_2(\mathcal{B}), \ldots$
$\ldots, \bar{\Delta}_m(\mathcal{A}) = \bar{\Delta}_m(\mathcal{B})$. Из равенства нулю минора, содержащего первую и $m+1$-ю строки, в силу индуктивного предположения получаем $\bar{\Delta}_{m+1}(\mathcal{A}) = \bar{\Delta}_{m+1}(\mathcal{B})$.

Доказательство достаточности легко провести методом индукции аналогично доказательству необходимости.

Пусть матрицы

$$F(x)=\begin{Vmatrix}\varepsilon_1(x) & 0\\ \varepsilon_2(x)\,a(x) & \varepsilon_2(x)\end{Vmatrix},\quad G(x)=\begin{Vmatrix}\varepsilon_1(x) & 0\\ \varepsilon_1(x)\,b(x) & \varepsilon_2(x)\end{Vmatrix}$$

полуориентированы в точке $(\alpha_i,\ \alpha_p)\in M_\delta^2$ и, как и ранее, k_i, $i=1,\ldots n$ — кратности корней α_i полинома $\delta(x)$ и $k_i'=\overline{k}_i+1$, где $\overline{k}_i$ — кратности корней α_i в полиноме $a^{(1)}(x)$. Будем считать, что $\alpha_i=\alpha_p$ и $k_p'<k_p$, если матрица $F(x)$ принадлежит H_1, H_2 или H_3. Без ограничения общности предполагаем также, что $k_p'<\frac{k_p}{2}$ в случае $F(x)\in H_1$. Возможность такой полуориентации обеспечивает теорема 3. Обозначим через $\overline{M}_\delta$ пересечение $M_\delta\cap M_a$, M_a — множество корней полинома $a(x)$, через $\overline{\overline{M}}_\delta$ — разницу $M_\delta\setminus M_a$ (возможно, $\overline{\overline{M}}_\delta=\varnothing$). Для удобства введем еще такие обозначения:

$$a_{ij}=\frac{a^{(j)}(\alpha_i)}{j!},\quad b_{ij}=\frac{b^{(j)}(\alpha_i)}{j!},\quad i=1,\ \ldots\ n,\ j=0,\ \ldots\ k_i-1.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Для полускалярной эквивалентности указанных выше матриц необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1. Если $F(x),\ G(x)\in H_1$, то а) $(a(x),\ \delta(x))=(b(x),\ \delta(x))$; б) для каждого $\alpha_f\in\overline{M}_\delta$ такого, что $k_f-k_f'\leqslant k_f'$,

$$a^{(0)}(\alpha_f)=b^{(0)}(\alpha_f),\ \ldots,\ a^{(k_f-1)}(\alpha_f)=b^{(k_f-1)}(\alpha_f);\tag{8}$$

в) для каждого $\alpha_i\in\overline{M}_\delta\,(i=i_1,\ \ldots\ i_h)$ такого, что $k_i-k_i'>k_i'$, в матрицах

$$\mathcal{A}_i=\begin{Vmatrix}a_{i,k_i'+1} & \cdot & a_{i,k_i-1}\\ a_{i,k_i'} & \ddots & \\ & \ddots & \vdots\\ 0 & & a_{i,k_i'}\,a_{i,k_i'+1}\end{Vmatrix},\quad \mathcal{B}_i=\begin{Vmatrix}b_{i,k_i'+1} & \cdot & b_{i,k_i-1}\\ b_{i,k_i'} & \ddots & \\ & \ddots & \vdots\\ 0 & & b_{i,k_i'}\,b_{i,k_i'+1}\end{Vmatrix}\tag{9}$$

$$a_{i,k_i'}=b_{i,k_i'},\quad \Delta_l(\mathcal{A}_i)=\Delta_l(\mathcal{B}_i),\quad 0<l<k_i-k_i',\quad l\neq k_i';\tag{10}$$

$$a_{i,2k_i'}-a^2_{i,k_i'}a_{p,2k_p'}=b_{i,2k_i'}-b^2_{i,k_i'}b_{p,2k_p'};\tag{11}$$

г) для каждого $\alpha_j\in\overline{\overline{M}}_\delta$ такого, что $k_j'<k_j$, в матрицах

$$\mathcal{A}_j=\begin{Vmatrix}a_{j1} & \cdot & a_{j,k_j-1}\\ a_{j0} & \ddots & \\ & \ddots & \vdots\\ 0 & & a_{j0}a_{j1}\end{Vmatrix},\quad \mathcal{B}_j=\begin{Vmatrix}b_{j1} & \cdot & b_{j,k_j-1}\\ b_{j0} & \ddots & \\ & \ddots & \vdots\\ 0 & & b_{j0}b_{j1}\end{Vmatrix}\tag{12}$$

$$\overline{\Delta}_l(\mathcal{A}_j)=\overline{\Delta}_l(\mathcal{B}_j),\quad l=1,\ \ldots,\ k_j-1;\tag{13}$$

д) для каждого $\alpha_j \in \overline{M}_\delta$ выполняется равенство

$$a_{p,2k'_p} + \frac{1}{a_{j0}} = b_{p,2k'_p} + \frac{1}{b_{j0}}. \tag{14}$$

2. Если $F(x)$, $G(x) \in H_2$, то выполняются пп. а) и б).

3. Если $F(x)$, $G(x) \in H_3$, то выполняются пп. а), б), г) и е) для каждого $\alpha_j \in \overline{\overline{M}}_\delta$ $(j = j_1, \ldots, j_q)$ выполняется равенство

$$\frac{a_{j0} - a_{j_10}}{a_{j0}a_{j_10}} = \frac{b_{j0} - b_{j_10}}{b_{j0}b_{j_10}}. \tag{15}$$

4. Если $F(x)$, $G(x) \in H_4$, то выполняется п. а).

5. Если $F(x)$, $G(x) \in H_5$, то выполняется п. а) и ж) для каждого $\alpha_j \in \overline{\overline{M}}_\delta$ $(j = j_1, \ldots, j_q)$ справедливо равенство

$$\frac{a_{j_10}(1 - a_{j0})}{a_{j0}(1 - a_{j_10})} = \frac{b_{j_10}(1 - b_{j0})}{b_{j0}(1 - b_{j_10})}, \tag{16}$$

где $a_{j_10} \neq 1$.

Доказательство. Необходимость. Пусть матрицы $F(x)$, $G(x)$ полускалярно эквивалентны, т. е. существуют неособенная числовая матрица S и обратимая полиномиальная матрица $R(x)$, такие что

$$SF(x) = G(x)R(x). \tag{17}$$

Поскольку все элементы матриц $F(x)$ и $G(x)$ делятся без остатка на полином $\varepsilon_1(x)$, то разделим на него обе части равенства (17), проведем соответствующие сокращения и запишем полученное равенство подробно:

$$\begin{Vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ a(x) & \delta(x) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ b(x) & \delta(x) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} r_{11}(x) & r_{12}(x) \\ r_{21}(x) & r_{22}(x) \end{Vmatrix}.$$

Последнее равносильно таким четырем скалярным равенствам:

$$\begin{aligned} s_{11} + s_{12}a(x) &= r_{11}(x), \\ s_{12}\delta(x) &= r_{12}(x), \\ s_{21} + s_{22}a(x) &= r_{11}(x)b(x) + \delta(x)r_{21}(x), \\ s_{22}\delta(x) &= r_{12}(x)b(x) + \delta(x)r_{22}(x). \end{aligned}$$

Положив в третьем из них $x = \alpha_t$, получим $s_{21} = 0$, а подставив $r_{11}(x)$ из первого в третье, получим равенство

$$s_{22}a(x) - s_{11}b(x) - s_{12}a(x)b(x) = \delta(x)r_{21}(x) \tag{18}$$

и сравнение

$$s_{22}a(x) - s_{11}b(x) - s_{12}a(x)b(x) \equiv 0 \pmod{\delta(x)}. \tag{19}$$

Так как $s_{11} \neq 0$, $s_{22} \neq 0$ (матрица S неособенная), то из сравнения (19) видно, что $(a(x), \delta(x)) \mid b(x)$ и $(b(x), \delta(x)) \mid a(x)$. Поэтому $(a(x), \delta(x)) \mid (b(x), \delta(x))$ и $(b(x), \delta(x)) \mid (a(x), \delta(x))$, следовательно, $(a(x), \delta(x)) = (b(x), \delta(x))$.

Необходимость условия а) доказана, что и доказывает лемму 1.

Пусть матрицы $F(x)$ и $G(x)$ принадлежат H_1, H_2 или H_3. Дифференцируем k'_p раз обе части равенства (18) в точке $x = \alpha_p$. Учитывая, что $a^{(k'_p)}(\alpha_p) = k'_p! = b^{(k'_p)}(\alpha_p)$, получаем $s_{11} = s_{22}$. Из сравнения (19) можно записать следующее матричное равенство:

$$\| s_{11} \quad s_{12} \| \, \| D_1 \ \ldots \ D_n \| = \| 0 \ \ldots \ 0 \|,$$

где

$$D_f = \begin{Vmatrix} a_{f0} - b_{f0} & \ldots & a_{f,k_f-1} - b_{f,k_f-1} \\ 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix},$$

если $\alpha_f \in \overline{M}_\delta$ и $k_f - k'_f \leqslant k'_f$;

$$D_i = \left\| \begin{matrix} a_{i,k_i'} - b_{i,k_i'} & \ldots & a_{i,2k_i'} - b_{i,2k_i'} & \ldots & a_{i,k_i-1} - b_{i,k_i-1} \\ 0 & \ldots & -a_{i,k_i'} b_{i,k_i'} & \ldots & -(a_{i,k_i-k_i'-1} b_{i,k_i'} + \cdots + a_{i,k_i'} b_{i,k_i-k_i'-1}) \end{matrix} \right\|,$$

если $\alpha_i \in \overline{M}_\delta$ и $k_i - k_i' > k_i'$;

$$D_j = \left\| \begin{matrix} a_{j0} - b_{j0} & \ldots & a_{j,k_j-1} - b_{j,k_j-1} \\ -a_{j0} b_{j0} & \ldots & -(a_{j0} b_{j,k_j-1} + \cdots + a_{j,k_j-1} b_{j0}) \end{matrix} \right\|,$$

если $\alpha_j \in \overline{\overline{M}}_\delta$. Так как $s_{11} \neq 0$, то в каждой из подматриц D_i первая строка является нулевой, поэтому $a_{f0} = b_{f0}, \ldots, a_{f,\,k_f-1} = b_{f,\,k_f-1}$, откуда следует (8).

Если существуют $\alpha_j \in \overline{\overline{M}}_\delta$ такие, что $k_j' < k_j$, то в силу того, что $s_{11} \neq 0$, rang $D_j = 1$, и леммы 3 в матрицах (12) выполняются равенства (13). Отметим, что если $F(x) \in H_2$, то $\overline{\overline{M}}_\delta = \varnothing$, поэтому условие г) касается только матриц, принадлежащих H_1 или H_3.

Пусть $F(x)$, $G(x) \in H_1$. Поскольку $s_{11} \neq 0$, то rang $D_i = 1$, следовательно, согласно лемме 2 в матрицах (9) выполняются равенства (10). По той же причине каждые два столбца матрицы $\| D_1 \ldots D_n \|$ линейно зависимы. Из линейной зависимости k_i' — 1-го столбца каждой из подматриц D_i, $i = i_1, \ldots, i_h$, из k_p' — 1-м столбцом подматрицы D_p вытекают равенства (11). Если $\overline{\overline{M}}_\delta \neq \varnothing$, то из линейной зависимости k_p' — 1-го столбца подматрицы D_p с первым столбцом каждой из подматриц D_j следуют равенства (14).

Если $F(x)$, $G(x) \in H_3$, то $\overline{\overline{M}}_\delta \neq \varnothing$. Из линейной зависимости первого столбца каждой из подматриц D_j, $j = j_1, \ldots, j_q$, с первым столбцом подматрицы D_{j_1} вытекает равенство (15).

В случае $F(x)$, $G(x) \in H_5$ сравнение (19) равносильно такому матричному равенству:

$$\left\| \begin{matrix} a_{j_1} & -b_{j_1} & -a_{j_1} b_{j_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j_q} & -b_{j_q} & -a_{j_q} b_{j_q} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} s_{22} \\ s_{11} \\ s_{12} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\|. \tag{20}$$

Среди строк матрицы из (20) существует строка $\| 1 - 1 - 1 \|$. В некоторой строке той же матрицы первые два элемента отличны от 1. Без ограничения общности можно считать такой первую строку. Так как $s_{11} \neq 0$, $s_{22} \neq 0$, то все миноры третьего порядка матрицы из (20) равны нулю. Очевидно, достаточно рассматривать только те миноры, которые содержат указанные выше линейно независимые строки. Легко убедиться, что из равенства нулю этих миноров следуют соотношения (16). Необходимость теоремы доказана.

Для доказательства второй части теоремы достаточно провести все изложения в обратном порядке.

Следствие. Принадлежащие к H_2 или H_4 и полуориентированные в одной и той же точке $(\alpha_t, \alpha_p) \in M_\delta^2$ матрицы $F(x)$ и $G(x)$ тогда и только тогда полускалярно эквивалентны, когда $F(x) = G(x)$.

Уточним вид матрицы $F(x)$ из (4) так, чтобы любые две полускалярно эквивалентные матрицы, имеющие этот вид, совпадали.

Для каждого $\alpha_j \in M_\delta$ и фиксированного $\alpha_r \in \overline{\overline{M}}_\delta$ выражения $\frac{a_{j0} - a_r}{a_{j0} a_{r0}}$, $\frac{a_{r0}(1 - a_{j0})}{a_{j0}(1 - a_{r0})}$ обозначим соответственно через I_{jr}, J_{jr}.

Определение 2. Будем говорить, что матрица $F(x)$ ориентированная в точке $(\alpha_t, \alpha_p, \alpha_r)$ декартова куба M_δ^3, если она полуориентированная в точке $(\alpha_t, \alpha_p) \in M_\delta^2$ и выполняются такие условия:

$$a^{(2k_r')}(\alpha_r) = 0, \text{ если } F(x) \in H_1;$$

$$a(\alpha_r) = \min_i\left(-1,\ \operatorname{Re}\frac{1}{I_{ir}} - 1\right), \text{ если } F(x) \in H_3;$$

$$a(\alpha_r) = \min_i\left(-1,\ \operatorname{Re}\frac{J_{ir}}{J_{ir}-1} - 1\right), \text{ если } F(x) \in H_5.$$

Теорема 5. Матрица $F(x)$ вида (4) полускалярно эквивалентна матрице, ориентированной в некоторой точке $(\alpha_t, \alpha_p, \alpha_r) \in M_\delta^3$, причем если $F(x) \in H_1$, то $\alpha_t = \alpha_p = \alpha_r$, $k_t' < \frac{k_t}{2}$, и если $F(x) \in H_3$, то $\alpha_t = \alpha_p$, $k_t' < \frac{k_t}{2}$.

Доказательство. Пусть матрица $F(x) \in H_1$ вида (4) полуориентированная в точке $(\alpha_t, \alpha_p) \in M_\delta^2$, где $\alpha_t = \alpha_p$, $k_t' < \frac{k_t}{2}$. Положив в соотношениях (11) $b_{t,2k_t'} = 0$, $b_{i,k_i'} = a_{i,k_i'}$, однозначно находим $b_{i,2k_i'}$, $i = i_1, \ldots, i_h$. Положив в матрицах $\mathcal{B}_i$, $i = i_1, \ldots, i_h$, из (9) $b_{i,k_i'} = a_{i,k_i'}, \ldots, b_{i,2k_i'-1} = a_{i,2k_i'-1}$, по определенным выше $b_{i,2k_i'}$ из соотношений (10) найдем остальные элементы этих матриц. Если $\overline{\overline{M}}_\delta \neq \varnothing$, то из равенств (14) определяем b_{j0}, $j = j_1, \ldots, j_q$. А если существуют $\alpha_j \in \overline{\overline{M}}_\delta$ такие, что $k_j' < k_j$, то из соотношений (13) по найденным b_{j0} определяем $b_{j1}, \ldots, b_{j,k_j-1}$. Существует единственный полином $b(x)$ степени меньшей степени $\delta(x)$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $b^{(0)}(\alpha_j) = 0! b_{j0}, \ \ldots, \ b^{(k_j-1)}(\alpha_j) = (k_j - 1)!\, b_{j,k_j-1}$

для каждого $\alpha_j \in \overline{\overline{M}}_\delta$;

2) $b^{(0)}(\alpha_f) = a^{(0)}(\alpha_f), \ \ldots, \ b^{(k_f-1)}(\alpha_f) = a^{(k_f-1)}(\alpha_f)$

для каждого $\alpha_f \in \overline{M}_\delta$, такого, что $k_f - k_f' \leqslant k_f'$;

3) $b^{(0)}(\alpha_i) = \cdots = b^{(k_i'-1)}(\alpha_i) = 0, \ b^{k_i'}(\alpha_i) = k_i'! b_{i,k_i'}, \ \ldots, \ b^{k_i-1}(\alpha_i) = (k_i - 1)!\, b_{i,k_i-1}$,

для каждого $\alpha_i \in \overline{M}_\delta$ такого, что $k_i - k_i' > k_i'$.

Задача определения полинома $b(x)$ по фиксированным значениям его в точках α_i, $i = 1, \ldots, n$, и фиксированным $k_i - 1$ последовательным производным известна как задача общей интерполяции Эрмита [3].

Если матрица $F(x)$ принадлежит к H_2 или H_4, то она уже ориентированная в точке $(\alpha_t, \alpha_p, \alpha_r) \in M_\delta^3$. Если матрица $F(x) \in H_3$ полуориентированная в точке $(\alpha_t, \alpha_p) \in M_\delta^2$, то фиксируем произвольный корень $\alpha_r \in \overline{\overline{M}}_\delta$. Полагая в равенствах (15) $b_{r0} = \min_i\left(-1, \operatorname{Re}\frac{1}{I_{ir}} - 1\right)$, однозначно определяем b_{j0}, $j = j_1, \ldots, j_q$, по которым из соотношений (13) находим b_{jm}, $m = 1, \ldots, k_j - 1$. Существует один и только один полином степени меньшей степени $\delta(x)$, удовлетворяющий таким условиям:

1) $b^{(0)}(\alpha_j) = 0! b_{j0}, \ \ldots, \ b^{(k_j-1)}(\alpha_j) = (k_j - 1)! b_{j,k_j-1}$

для каждого $\alpha_j \in \overline{\overline{M}}_\delta$;

2) $b^{(0)}(\alpha_i) = a^{(0)}(\alpha_i), \ \ldots, \ b^{(k_i-1)}(\alpha_i) = a^{(k_i-1)}(\alpha_i)$

для каждого $\alpha_i \in \overline{M}_\delta$.

Пусть, наконец, матрица $F(x) \in H_5$ полуорентированная в точке $(\alpha_t, \alpha_p) \in M_\delta^2$. Фиксируем корень $\alpha_r \in \overline{\overline{M}}_\delta$ такой, что $a(\alpha_r) \neq 1$. Полагая в соотношениях (16) $b_{r0} = \min \left(-1, \operatorname{Re} \frac{j_{ir}}{j_{ir-1}} - 1\right)$, для каждого $\alpha_j \in \overline{\overline{M}}_\delta$ находим b_{j0}, $j = j_1, \ldots, j_q$. Можно найти полином $b(x)$ степени меньшей степени $\delta(x)$, который удовлетворяет следующим условиям:

1) $b(\alpha_j) = b_{j_0}$, $b^{(m)}(\alpha_j) = a^{(m)}(\alpha_j)$, $m = 1, \ldots, k_j - 1$,

для каждого $\alpha_j \in \overline{\overline{M}}_\delta$;

2) $b^{(m)}(\alpha_i) = a^{(m)}(\alpha_i)$, $m = 0, \ldots, k_i - 1$,

для каждого $\alpha_i \in \overline{M}_\delta$.

В каждом из рассмотренных выше случаев матрица

$$G(x) = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1(x) & 0 \\ \varepsilon_1(x)\, b(x) & \varepsilon_2(x) \end{Vmatrix}$$

ориентированная в точке $(\alpha_t, \alpha_p, \alpha_r) \in M_\delta^3$. Кроме того, матрицы $F(x)$ и $G(x)$ полускалярно эквивалентны, так как удовлетворяют теореме 4. Теорема 5 доказана.

Доказательство этой теоремы дает практический метод построения для каждой матрицы вида (4) полускалярно эквивалентной матрицы, ориентированной в точке $(\alpha_t, \alpha_p, \alpha_r) \in M_\delta^3$.

Определение 3. Будем говорить, что матрицы $F(x)$ и $G(x)$ имеют одну и ту же K-форму, если они ориентированы согласно теореме 5 в одной и той же точке $(\alpha_t, \alpha_p, \alpha_r) \in M_\delta^3$.

Ясно, что не всякие две матрицы $A(x)$ и $B(x)$ могут быть приведены полускалярно эквивалентными преобразованиями к матрицам, имеющим одну и ту же K-форму. Однако легко убедиться, что если эти матрицы полускалярно эквивалентны, то такое приведение всегда возможно. Более того, справедлива следующая теорема.

Теорема 6. Полускалярно эквивалентные матрицы, имеющие одну и ту же K-форму, совпадают.

Доказательство. Пусть матрицы $F(x)$ и $G(x)$, имеющие одну и ту же K-форму, полускалярно эквивалентны. Тогда выполняется равенство (18). Если $F(x)$, $G(x) \in H_1$, то дифференцируем $2k_t'$ раз обе части этого равенства в точке $x = \alpha_t$. Если $F(x)$, $G(x) \in H_3$, то полагаем в этом равенстве $x = \alpha_r$. Каждый раз получаем $s_{12} = 0$, а так как $s_{11} = s_{22} \neq 0$, то $a(x) = b(x)$.

В случае $F(x)$, $G(x) \in H_2$ или $F(x)$, $G(x) \in H_4$ справедливость теоремы 6 вытекает из следствия теоремы 4. Если $F(x)$, $G(x) \in H_5$, то полагая в равенстве (18) $x = \alpha_p$, $x = \alpha_r$, получаем

$$s_{22} - s_{11} - s_{12} = 0,$$
$$s_{22}a(\alpha_r) - s_{11}b(\alpha_r) - s_{12}a(\alpha_r)\, b(\alpha_r) = 0.$$

Так как $a(\alpha_r) = b(\alpha_r) \neq 1$, то $s_{12} = 0$, $s_{11} = s_{22} \neq 0$ и $a(x) = b(x)$. Таким образом, во всех случаях $F(x) = G(x)$. Теорема доказана.

Замечание. Если матрица принадлежит H_6, то форму Смита считаем K-формой этой матрицы.

Пусть имеем два набора матриц второго порядка

$$(A_1, \ldots, A_l), \quad (B_1, \ldots, B_l). \tag{21}$$

Построим матричные полиномы

$$A(x) = Ex^l + A_1x^{l-1} + \cdots + A_l, \quad B(x) = Ex^l + B_1x^{l-1} + \cdots + B_l, \tag{22}$$

где E — единичная матрица. На основании работы [2] и теоремы 6 можно сформулировать критерий подобия наборов (21).

Теорема 7. Наборы (21) подобны, т. е. $A_i = T^{-1}B_iT$, $i = 1, \ldots, l$, тогда и только тогда, когда матричные полиномы (22), записанные в виде полиномиальных матриц, полускалярно эквивалентными преобразованиями приводятся к матрицам $F(x)$ и $G(x)$, имеющим одну и ту же K-форму, и $F(x) = G(x)$.

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М. : Наука, 1966.— 576 с.
2. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.*— В кн.: Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. К. : Наук. думка, 1977, с. 61—66.
3. *Ланкастер П.* Теория матриц.— М. : Наука, 1978.— 280 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
28.09.79

УДК 517.524

Д. И. Боднар

НЕОБХОДИМЫЙ И ДОСТАТОЧНЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Произвольную ветвящуюся цепную дробь с положительными компонентами с использованием эквивалентных преобразований, т. е. преобразований, не изменяющих величин подходящих дробей, можно привести к виду [5]

$$b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1 \mid}{\mid b_{i_1 i_2 \ldots i_k}}. \tag{1}$$

При $N = 1$ эта дробь вырождается в обычную цепную дробь

$$b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \mid}{\mid b_k}, \tag{2}$$

вопрос о сходимости которой полностью решается необходимым и достаточным критерием Зейделя [5].

Теорема Зейделя. Цепная дробь (2) с положительными компонентами сходится тогда и только тогда, когда ряд Σb_k расходится.

В работе [1] доказан признак сходимости ветвящейся цепной дроби (1), эквивалентный достаточности теоремы Зейделя в случае $N = 1$, в работе [4] установлена теорема, эквивалентная необходимости признака Зейделя, которая формулируется так.

Теорема 1. Ветвящаяся цепная дробь (1) с положительными компонентами расходится, если ряд $\Sigma\beta_k$ сходится, где $\beta_k = \max\limits_{i_1 i_2 \ldots i_k} b_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ — максимальный элемент дроби (1) на k-м этаже.

Нам понадобится также следующее утверждение [3].

Теорема 2. Ветвящаяся цепная дробь (1) с положительными компонентами сходится, если

$$\lim_{p \to \infty} \sum_{k=1}^{2p} \alpha_k \left(\alpha_{k+1} + \frac{N \mid}{\mid \beta_{k+2}} + \frac{N \mid}{\mid \alpha_{k+3}} + \cdots + \frac{N \mid}{\mid \alpha_{2p-k+2\left[\frac{k}{2}\right]+1}} \right) = \infty, \tag{3}$$

где $\alpha_k = \min\limits_{i_1 i_2 \ldots i_k} b_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, $\beta_k = \max\limits_{i_1 i_2 \ldots i_k} b_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ — минимальный и максимальный элементы дроби (1) на k-м этаже; N — число ветвлений.

Следствие. При выполнении условий теоремы 2 ветвящаяся цепная дробь (1) сходится, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty \tag{4}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left(\alpha_{k+1} + \frac{N \mid}{\mid \beta_{k+2}} + \frac{N \mid}{\mid \alpha_{k+3}} + \cdots \right) = \infty. \tag{5}$$