

1. Вербицкий Т. З., Бойко Б. Д. Исследование генерации продольной волны поперечной, распространяющейся в пористой горной породе.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 3, с. 225—228.
2. Вербицкий Т. З. Физическая природа нелинейной упругости геологических сред с фазовыми микронеоднородностями и особенности распространения в них упругих волн.— Геофиз. сб. АН УССР, 1976, № 75, с. 16—24.
3. Максимов Б. И. Об изменении спектра монохроматической волны в диссипативной среде.— Акуст. журн., 1969, 15, вып. 3, с. 462—467.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
10.01.79

УДК 538.311.001.24

Л. И. Глухивский

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА НА ЦВМ БЕГУЩЕЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В ПРОВОДЯЩЕМ ФЕРРОМАГНИТНОМ СЛОЕ

Необходимость расчета бегущей электромагнитной волны в проводящем ферромагнитном слое возникает при решении большого класса прикладных задач, среди которых — исследование индукционных электрических машин с массивным ферромагнитным ротором, исследование индукционного нагрева ферромагнитных деталей и др.

Нелинейность характеристики намагничивания среды практически исключает возможность расчета в ней переменного электромагнитного поля аналитическими методами. Реализация для этой цели в случае двумерных континуумов даже сравнительно несложной конфигурации метода сеток, заменяющего краевые задачи для дифференциальных уравнений теми или иными разностными схемами, возможна только с применением ЦВМ большой производительности и притом с большими затратами машинного времени.

В настоящей статье предлагается дифференциальный гармонический метод приближенного численного решения этой задачи для двумерного пространства, позволяющий значительно уменьшить затраты машинного времени и объем используемой памяти ЦВМ, что достигается благодаря сведению двумерной задачи к одномерной исходя из предположения об ограниченном спектре пространственных гармоник искомого поля в направлении движения волны.

Пусть на нижней и верхней поверхностях ферромагнитного слоя (см. рисунок) заданы волны нормальных составляющих B_{ny} и B_{vy} векторов магнитной индукции, движущиеся в направлении оси $O'x'$ со скоростью v . Дифференциальные уравнения Максвелла в системе координат xOy , перемещающейся относительно неподвижной системы $x'O'y'$ равномерно и прямолинейно в направлении оси $O'x'$ со скоростью движения волн, имеют вид

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = cB_y, \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

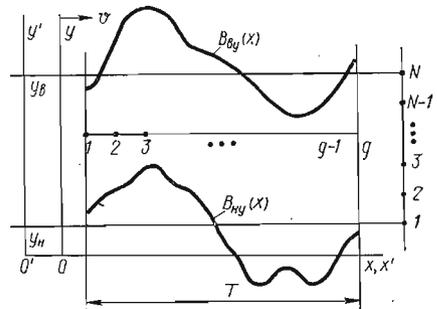
где $c = \gamma v$; γ — удельная электрическая проводимость среды.

Вектор \vec{H} напряженности магнитного поля связан с вектором \vec{B} магнитной индукции характеристикой намагничивания среды

$$\vec{H} = \vec{H}(\vec{B}) \quad (2)$$

или в проекциях на оси x, y —

$$H_x = H_x(B_x, B_y), \quad H_y = H_y(B_x, B_y).$$



Ищем решение системы (1) в виде усеченных рядов Фурье

$$Z_{\beta} = \sum_{k=1}^n (Z_{\beta ck} \cos k\eta + Z_{\beta sk} \sin k\eta) \quad (Z = H, B, \beta = x, y). \quad (3)$$

Здесь $\eta = ax$; $a = \frac{2\pi}{T}$; T — период пространственной волны; $Z_{\beta ck}$, $Z_{\beta sk}$ — искомые амплитуды косинусных и синусных составляющих гармоник напряженности магнитного поля и магнитной индукции, зависящие от координаты y .

Подставив выражения (3) в уравнения (1) и приравняв суммы косинусных и синусных членов, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, состоящей из n подсистем вида

$$\begin{aligned} \frac{dH_{xck}}{dy} &= kaH_{ysk} - cB_{yck}, & \frac{dH_{xsk}}{dy} &= -kaH_{yck} - cB_{ysk}, \\ \frac{dB_{yck}}{dy} &= -kaB_{xsk}, & \frac{dB_{ysk}}{dy} &= kaB_{xck}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $k = 1, 2, \dots, n$. Граничными условиями для этих уравнений являются амплитуды B_{nyck} , $B_{ny sk}$, B_{byck} , $B_{by sk}$ пространственных гармоник зависимостей $B_{ny} = B_{ny}(x)$, $B_{by} = B_{by}(x)$ на нижней и верхней поверхностях ферромагнитного слоя.

Для возможности решения системы (4) необходимо располагать связями между входящими в нее амплитудами H_{xck} , H_{xsk} , H_{yck} , H_{ysk} и B_{xck} , B_{xsk} , B_{yck} , B_{ysk} . Эти связи могут быть получены на основе зависимостей (2) и принятого допущения об ограниченности спектров зависимостей $H_x(x)$, $H_y(x)$, $B_x(x)$, $B_y(x)$ при любом неизменном значении y . Выделим на периоде T элементарный слой среды толщины dy и введем для него $4n$ -мерные векторы

$$\vec{H}_p = \text{colon}(H_{xc1}, H_{xs1}, \dots, H_{xcn}, H_{xsn}, H_{yc1}, H_{ys1}, \dots, H_{y cn}, H_{ysn}), \quad (5)$$

$$\vec{B}_p = \text{colon}(B_{xc1}, B_{xs1}, \dots, B_{xcn}, B_{xsn}, B_{yc1}, B_{ys1}, \dots, B_{y cn}, B_{ysn}),$$

являющиеся гармоническим отображением зависимостей $\vec{H} = \vec{H}(x)$ и $\vec{B} = \vec{B}(x)$ соответственно. Наложим на элементарный слой среды на периоде T сетку, состоящую из g равномерно удаленных один от другого узлов, и составим $2g$ -мерные векторы

$$\vec{H}_c = \text{colon}(H_{x1}, \dots, H_{xg}, H_{y1}, \dots, H_{yg}), \quad (6)$$

$$\vec{B}_c = \text{colon}(B_{x1}, \dots, B_{xg}, B_{y1}, \dots, B_{yg}),$$

являющиеся сеточным отображением зависимостей $\vec{H} = \vec{H}(x)$ и $\vec{B} = \vec{B}(x)$.

Векторы \vec{H}_p и \vec{B}_p определенным образом связаны между собой. Зависимость

$$\vec{H}_p = \vec{H}_c(\vec{B}_p) \quad (7)$$

назовем гармонической характеристикой намагничивания элементарного слоя среды. Рассчитать эту зависимость можно по следующему алгоритму. Задавшись вектором \vec{B}_p , вычислим с учетом (3) вектор \vec{B}_c по выражению

$$\vec{B}_c = \vec{F}\vec{B}_p, \quad (8)$$

где \vec{F} — блочно-диагональная матрица, оба диагональных блока которой являются матрицами размерности $g \times 2n$ вида

$$\left\| \begin{array}{cccccc} \cos \eta_1 & \sin \eta_1 & \cos 2\eta_1 & \sin 2\eta_1 & \dots & \cos n\eta_1 & \sin n\eta_1 \\ \cos \eta_2 & \sin \eta_2 & \cos 2\eta_2 & \sin 2\eta_2 & \dots & \cos n\eta_2 & \sin n\eta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos \eta_g & \sin \eta_g & \cos 2\eta_g & \sin 2\eta_g & \dots & \cos n\eta_g & \sin n\eta_g \end{array} \right\|.$$

С использованием характеристики намагничивания (2) среды по элементам вектора \vec{B}_c найдем элементы вектора \vec{H}_c . Далее, из вектора \vec{H}_c получим вектор \vec{H}_r по выражению, выведенному из формул разложения периодической функции в ряд Фурье, в которых определенные интегралы заменены суммами

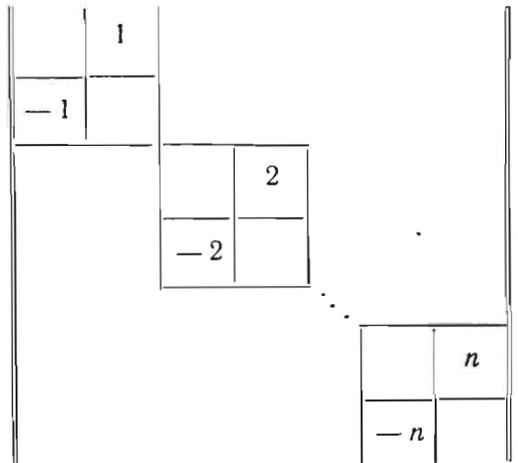
$$\vec{H}_r = \frac{1}{\pi} \hat{F} \check{\Delta} \vec{H}_c, \quad (9)$$

где \check{F}_i — матрица транспонированная по отношению к матрице \hat{F} ; $\hat{\Delta} \eta = \text{diag}(\Delta \eta_1, \Delta \eta_2, \dots, \Delta \eta_g, \Delta \eta_1, \Delta \eta_2, \dots, \Delta \eta_g)$ — диагональная матрица, составленная из угловых расстояний между соседними узлами сетки, наложенной на период T , с учетом весовых коэффициентов выбранной формулы численного интегрирования функций.

Ввиду нелинейности зависимости (7) систему (4) целесообразно решать численным способом. Воспользуемся для этой цели сеточным методом. С учетом обозначений (5) представим систему (4) двумя векторными дифференциальными уравнениями

$$\check{P} \frac{d\vec{H}_r}{dy} - a\check{D}_1 \vec{H}_r + c\check{Q} \vec{B}_r = 0, \quad \check{Q} \frac{d\vec{B}_r}{dy} + a\check{D}_2 \vec{B}_r = 0, \quad (10)$$

где \check{P} , \check{Q} , \check{D}_1 , \check{D}_2 — блочные матрицы размерности $2n \times 4n$, состоящие из двух блоков размерности $2n \times 2n$ каждая; правые блоки матриц \check{P} , \check{D}_2 и левые блоки матриц \check{Q} , \check{D}_1 — нулевые матрицы; левый блок матрицы \check{P} и правый блок матрицы \check{Q} — единичные матрицы; правый блок матрицы \check{D}_1 и левый блок матрицы \check{D}_2 — это матрицы вида



Наложим на интервал $y_b - y_n$ одномерную сетку, образованную N равноудаленными узлами (см. рисунок). Будем полагать магнитное поле во всех N узлах искомым, а заданными будем считать нормальные составляющие вектора магнитной индукции вне ферромагнитного слоя на поверхностях, расположенных в непосредственной близости к его границам.

Заменив дифференциальные уравнения (10) разностными на сетке с учетом сформулированных выше краевых условий, приходим к следующей системе конечно-разностных уравнений:

$$\begin{aligned} \check{Q} \vec{B}_{r1} &= \check{Q} \vec{B}_{rn}, \\ \check{Q} (-3\vec{B}_{r1} + 4\vec{B}_{r2} - \vec{B}_{r3})/2h + a\check{D}_2 \vec{B}_{r1} &= 0, \\ \check{P} (\vec{H}_{r3} - \vec{H}_{r1})/2h - a\check{D}_1 \vec{H}_{r2} + c\check{Q} \vec{B}_{r2} &= 0, \end{aligned}$$

\check{Q}							
$-\frac{3\check{Q}}{2h} + a\check{D}_2$	$\frac{4\check{Q}}{2h}$	$-\frac{\check{Q}}{2h}$					
$-\frac{\check{P}}{2h} \check{R}_{r1}$	$-a\check{D}_1 \check{R}_{r2} + c\check{Q}$	$\frac{\check{P}}{2h} \check{R}_{r3}$					
$-\frac{\check{Q}}{2h}$	$a\check{D}_2$	$\frac{\check{Q}}{2h}$					
	$-\frac{\check{P}}{2h} \check{R}_{r2}$	$-a\check{D}_1 \check{R}_{r3} + c\check{Q}$	$\frac{\check{P}}{2h} \check{R}_{r4}$				
	$-\frac{\check{Q}}{2h}$	$a\check{D}_2$	$\frac{\check{Q}}{2h}$				
				...			
					$-\frac{\check{P}}{2h} \check{R}_{rN-2}$	$-a\check{D}_1 \check{R}_{rN-1} + c\check{Q}$	$\frac{\check{P}}{2h} \check{R}_{rN}$
					$-\frac{\check{Q}}{2h}$	$a\check{D}_2$	$\frac{\check{Q}}{2h}$
					$\frac{\check{Q}}{2h}$	$-\frac{4\check{Q}}{2h}$	$\frac{3\check{Q}}{2h} + a\check{D}_2$
							\check{Q}

$\check{Q} \vec{B}_{rH}$
\vec{B}'_{r1}
\vec{B}'_{r2}
\vec{B}'_{r3}
...
\vec{B}'_{rN-1}
\vec{B}'_{rN}
$\check{Q} \vec{B}_{r0}$

(12)

отражающая в осях x, y тензор дифференциального удельного магнитного сопротивления среды. Следуя аналогии между содержанием зависимостей (2) и (7), полную производную \check{R}_r целесообразно рассматривать как тензор дифференциального гармонического удельного магнитного сопротивления элементарного слоя среды. С учетом соотношений (8) и (9) имеем

$$\check{R}_r = \frac{d\check{H}_r}{d\check{H}_c} \frac{d\check{H}_c}{d\check{B}_c} \frac{d\check{B}_c}{d\check{B}_r} = \frac{1}{\pi} \check{F}_r \check{v}_c \check{F}, \quad (14)$$

где \check{v}_c — блочная матрица, состоящая из четырех одинакового порядка подматриц $\check{v}_{c11} = \text{diag}(v_{xx1}, \dots, v_{xxg})$, $\check{v}_{c12} = \text{diag}(v_{xy1}, \dots, v_{xyg})$, $\check{v}_{c21} = \text{diag}(v_{yx1}, \dots, v_{yxg})$ и $\check{v}_{c22} = \text{diag}(v_{yy1}, \dots, v_{yyg})$, диагональные элементы которых являются соответствующими элементами матриц вида (13), вычисляемых для g узловых точек слоя (вдоль координаты x) в j -м узле сетки. Способ вычисления матриц вида (13) для различных сред приведен в работе [1].

Расчет бегущей электромагнитной волны в проводящем ферромагнитном слое сводится к численному интегрированию системы (12) по параметру ϵ при нулевых начальных условиях. При этом на шаге интегрирования выполняются следующие операции:

а) по известным из предыдущего шага векторам \check{B}_{rj} ($j = 1, 2, \dots, N$) вычисляются по формуле (8) векторы \check{B}_{cj} , по формулам, приведенным в работе [1], вычисляются элементы матриц \check{v}_{cj} и по формуле (14) — гармонические дифференциальные удельные магнитные сопротивления \check{R}_{rj} слоев среды для всех N узлов сетки вдоль координаты y ;

б) формируется матрица коэффициентов системы (12);

в) система (12) решается относительно производных $\check{B}_{rj} = d\check{B}_{rj}/d\epsilon$;

г) в соответствии с принятым численным методом интегрирования (Эйлера, Рунге — Кутта, Адамса и др.) вычисляются приращения векторов \check{B}_{rj} на шаге интегрирования $\Delta\epsilon$ и новые значения векторов \check{B}_{rj} .

Длительность расчета поля в соответствии с изложенным алгоритмом при $n = 3$ и $N = 10$ на ЦВМ «ЕС-1022» составляет около 3 мин.

1. Фильц Р. В. Определение магнитных свойств шихтованного ферромагнетика. — Изв. вузов. Сер. Электромеханика, 1970, № 3, с. 257—261.
2. Шаманский В. Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. Киев: Наук. думка, 1966. — 244 с.