УДК 539.377 : 538.54

М. Т. Солодяк

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ И НАПРЯЖЕНИЯ В МАГНИТОМЯГКОМ УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ВО ВРЕМЕНИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим задачу об определении термоупругого состояния свободного от силовой нагрузки полупространства с ферромагнитного мягкого материала, на поверхности $z = 0$ которого поддерживается напряженность магнитного поля $\vec{H}^{(0)} = \{0,\ H_0 \cos \omega t^*,\ 0\}$, где ω — частота; t^* — время. Принимаем, что напряженное состояние обусловлено усредненным во времени по наименьшему периоду колебаний электромагнитной волны джоулевым теплом. Зависимость между индукцией B и напряженностью H магнитного поля принимаем в виде полиномиального ряда [1]

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} s_n H^{2n+1}. \tag{1}$$

Характеристики материала полупространства считаются постоянными.

Из уравнения индукции, записанного для данного случая в пренебрежении токами смещения

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \sigma \frac{\partial B}{\partial t^*}$$

с использованием соотношения (1), получаем

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n h^{2n} \frac{\partial h}{\partial t}. \tag{2}$$

Здесь введены безразмерные величины для напряженности магнитного поля, времени и толщинной координаты:

$$h = \frac{H}{H_0}, \quad t = \omega t^*, \quad x = \frac{z}{z_0}, \quad \varepsilon_n = c_n \varepsilon^n, \quad \varepsilon = \frac{H_0^2}{s_0}; \quad c_n = (2n+1) s_n s_0^{n-1},$$

$z_0 = \{2\omega\sigma s_0\}$ — параметр, характеризующий глубину проникновения электромагнитного поля.

Далее ограничимся случаем $\varepsilon_n < 1$, т. е. случаем средних внешних электромагнитных полей [2]. Решение уравнения (2) находим в виде ряда по параметру ε_n:

$$h(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_n^k h_{n,k}(x, t). \tag{3}$$

Анализ полученных решений (3), найденных с точностью до третьего приближения, показал, что с погрешностью меньшей 1% будет

$$h(x, t) = h_0(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n h_{n,1}(x, t), \tag{4}$$

где

$$h_0(x, t) = \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1+i}{2}x + it} + e^{-\frac{1-i}{2}x - it}\right);$$

$$h_{n,1}(x, t) = -\frac{(2n)!}{2^{2(n+1)}} \sum_{j=0}^{n} \frac{2n-2j+1}{j(2n-j+1)} \frac{1}{j^2(2n-j+1)^2 + n^2(2n-2j+1)^2} \times$$

$$\times \{[n(2n-2j+1) + j(2n-j+1)i](e^{-\frac{\sqrt{2n-2j+1}\,(1+i)}{2}x} -$$

$$
-e^{-\frac{2n+1+(2n-2j+1)i}{2}x}\Big) e^{(2n-2j+1)it} + [n(2n-2j+1) - j(2n-j+1)i] \times
$$

$$
\times \Big(e^{-\frac{\sqrt{2n-2j+1}(1-i)}{2}x} - e^{-\frac{2n+1-(2n-2j+1)i}{2}x}\Big) e^{-(2n-2j+1)it}\Big\}.
$$

Джоулево тепло, усредненное во времени по наименьшему периоду, запишется так:

$$
q(x) = q_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n q_n(x), \tag{5}
$$

где

$$
q_0(x) = e^{-x};
$$

$$
q_n(x) = -\frac{(2n)!}{2^{2n} n!\,(n+1)!\,n\,(n^2+2n+2)} [e^{-x} - (n+1)^2 e^{-(n+1)x}].
$$

Здесь

$$
q(x) = \frac{Q(x)}{Q_0}; \quad Q_0 = \sigma E_0^2 = \frac{H_0^2}{4\sigma z_0^2}.
$$

Температурное поле находим из уравнения теплопроводности

$$
\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{Q}{\lambda} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{6}
$$

при начальном

$$
T = T_0 \text{ при } t = 0 \tag{7}
$$

и граничных условиях

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial T}{\partial z} - H(T - T_0) = 0 \quad \text{при } x = 0,\\
&\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \qquad\qquad\qquad\ \text{при } x = \infty.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Здесь a и λ — соответственно коэффициенты температуропроводности и теплопроводности; H — относительный коэффициент теплоотдачи на поверхности; T_0 — температура на поверхности.

В безразмерных величинах уравнения (6) — (8) запишутся в виде

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 t^0}{\partial x^2} + q = \frac{\partial t^0}{\partial \tau},\\
&t^0 = 0 \qquad\qquad\quad \text{при } \tau = 0,\\
&\frac{\partial t^0}{\partial x} - \mathrm{Bi}\, t^0 = 0 \quad \text{при } x = 0,\\
&\frac{\partial t^0}{\partial x} = 0 \qquad\qquad \text{при } x = \infty.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Здесь $t^0 = \frac{T - T_0}{\bar{T}}$ — безразмерная температура; $\bar{T} = \frac{Q_0 z_0^2}{\lambda} = \frac{H_0^2}{4\sigma\lambda}$; Bi — критерий Био; $\tau = \frac{at}{z_0^2}$ — критерий Фурье.

С использованием преобразования Лапласа найдем

$$
t^0(x, \tau, \mathrm{Bi}) = -\frac{a}{\mathrm{Bi}(1-\mathrm{Bi})}\Big\{\frac{\mathrm{Bi}}{2} e^{\tau}\Big[(1-\mathrm{Bi}) e^{-x} \operatorname{erfc}\Big(\frac{x}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau}\Big) -
$$

$$
-(1+\mathrm{Bi}) e^{x} \operatorname{erfc}\Big(\frac{x}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau}\Big)\Big] + e^{\mathrm{Bi}(x+\mathrm{Bi}\,\tau)} \operatorname{erfc}\Big(\frac{x}{2\sqrt{\tau}} + \mathrm{Bi}\sqrt{\tau}\Big) -
$$

$$
-(1-\mathrm{Bi}) \operatorname{erfc}\frac{x}{2\sqrt{\tau}}\Big\} + a[e^{\tau} - 1] e^{-x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\mathrm{Bi}(n+1-\mathrm{Bi})} \times
$$

$$\times\left\{\frac{\mathrm{Bi}}{2(n+1)}e^{(n+1)^2\tau}\left[\left(1-\frac{\mathrm{Bi}}{n+1}\right)e^{-(n+1)x}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}-(n+1)\sqrt{\tau}\right)-\right.\right.$$
$$\left.-\left(1+\frac{\mathrm{Bi}}{n+1}\right)e^{(n+1)x}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}+(n+1)\sqrt{\tau}\right)\right]+e^{\mathrm{Bi}(x+\mathrm{Bi}\,\tau)}\operatorname{erfc}\times$$
$$\left.\times\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}+\mathrm{Bi}\sqrt{\tau}\right)-\left(1-\frac{\mathrm{Bi}^2}{(n+1)^2}\right)\operatorname{erfc}\frac{x}{2\sqrt{\tau}}\right\}+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n+1)^2}\left[e^{(n+1)^2\tau}-1\right]e^{-(n+1)x}, \tag{10}$$

где

$$a=1-\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n c_n\frac{(2n)!}{2^{2n}n!\,(n+1)^2\,n\,(n^2+2n+2)};$$

$$a_n=\varepsilon^n c_n\frac{(n+1)\,(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2\,n\,(n^2+2n+2)}.$$

Учитывая, что температурное поле изменяется только по толщине, температурные напряжения для свободного от силовой нагрузки упругого полупространства определяем по формуле [3]

$$\sigma_T(z,t)=-\frac{\alpha_t E}{1-\nu}T(z,t), \tag{11}$$

где α_t — коэффициент теплового расширения; ν — коэффициент Пуассона; E — модуль упругости.

Данная методика позволяет количественно исследовать влияние нелинейной зависимости между B и H на термоупругое состояние.

1. *Дружинин В. В.* Магнитные свойства электротехнической стали.— М. : Госэнергоиздат, 1962.— 320 с.
2. *Преображенский А. А.* Магнитные материалы и элементы.— М. : Высш. школа, 1976.— 336 с.
3. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Гачкевич А. Р., Чернявская Л. В.* Термоупругость электропроводных тел. Киев : Наук. думка, 1977.— 248 с.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
21.03.79

УДК 534.222 + 552.1:59

Б. Д. Бойко, Т. З. Вербицкий, А. И. Чигинь

ЛАБОРАТОРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ, СВЯЗАННЫХ С ПРОХОЖДЕНИЕМ УПРУГИХ ВОЛН ЧЕРЕЗ ТРЕЩИНОВАТУЮ ЗОНУ

Известно, что внешние термобарические условия существенно влияют на структуру и физико-механические свойства многофазных сред. Структура и физико-механические характеристики среды в свою очередь определяют параметры импульсных упругих волн (амплитудно-фазовый спектр, время прохождения и амплитуду колебаний), распространяющихся в данной среде. В работах [1, 2] показано, что при прохождении упругих волн через трещиноватое тело могут иметь место также нелинейные волновые явления, в том числе генерация продольной волны поперечной. Таким образом, существует принципиальная возможность по результатам лабораторных измерений параметров упругих волн, распространяющихся в исследуемом материале, судить о структурных изменениях, происходящих в нем под действием таких внешних факторов, как температура и давление. Проведенные ранее