УДК 534.1 : 531.221.3

И. И. Теребушко

О ВЛИЯНИИ НАПРАВЛЕНИЯ ПРОТЕКАЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ НА МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГОГО КРУГОВОГО ТРУБОПРОВОДА

Задача о малых колебаниях и устойчивости кругового трубопровода (в плоскости кривизны), несущего установившийся поток несжимаемой идеальной жидкости, рассматривалась в работах [1,2]. В данной работе исследуется вопрос о влиянии изменения направления потока жидкости на противоположное на динамику кругового трубопровода с упруго защемленными концами.

Представляя решение уравнения малых колебаний кругового трубопровода в виде $\varphi(\xi, \tau) = f(\xi)\, e^{\lambda\tau}$ и сохраняя обозначения работы [2], приходим к следующей задаче на собственные значения:

$$f^{VI}(\xi) - \beta f^{IV}(\xi) - \gamma f'''(\xi) - \alpha f''(\xi) - \varepsilon f'(\xi) - \eta f(\xi) = 0, \tag{1}$$

$$\begin{gathered} f(0) = f'(0) = 0, \quad f'''(0) - a_0 f''(0) = 0, \\ f(1) = f'(1) = 0, \quad f'''(1) + a_1 f''(1) = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $\beta = -\left(2\Theta_0^2 + \dfrac{\delta^2 + n^2}{\mu}\right)$; $\gamma = -\dfrac{2\delta}{\mu}\lambda$;

$$\alpha = -\left(\Theta_0^4 + \frac{1+q}{\mu}\lambda^2 + \frac{\delta^2 + n^2}{\mu}\cdot\Theta_0^2\right); \quad \varepsilon = -\frac{2\delta\Theta_0^2}{\mu}\lambda; \quad \eta = \frac{1+q}{\mu}\Theta_0^2\lambda^2;$$

$0 \leqslant a_0 \leqslant \infty$ и $0 \leqslant a_1 \leqslant \infty$ — параметры жесткости защемления концов трубопровода, причем индекс «0» соответствует левому концу, а индекс «1» — правому; λ — характеристический показатель.

Отметим, что параметр безразмерной скорости положительный ($\delta > 0$) при движении жидкости от левого конца к правому, а при движении жидкости от правого конца к левому он отрицательный ($\delta < 0$).

Представим общий интеграл уравнения (1), следуя работе [3], в таком виде:

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^{5} C_k \psi^{(k)}, \quad \psi(\xi, \beta, \gamma, \alpha, \varepsilon, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{l_n \xi^{n+5}}{(n+5)!}, \tag{3}$$

где

$$l_0 = 1; \quad l_1 = 0; \quad l_2 = \beta; \quad l_3 = \gamma; \quad l_4 = \beta^2 + \alpha;$$

$$l_5 = 2\gamma\beta + \varepsilon; \quad l_n = \beta l_{n-2} + \gamma l_{n-3} + \alpha l_{n-4} + \varepsilon l_{n-5} + \eta l_{n-6}$$

($n = 6, 7, \ldots$), причем $\psi(\xi, \beta, \gamma, \alpha, \varepsilon, \eta)$ — решение задачи Коши для уравнения (1) при следующих начальных условиях:

$$\psi(0) = \psi'(0) = \psi''(0) = \psi'''(0) = \psi^{IV}(0) = 0, \quad \psi^{V}(0) = 1.$$

Подставляя формулы (3) в (2), приходим к характеристическому уравнению рассматриваемой задачи

$$\Phi \equiv [\Delta' + (a_0 + a_1)\Delta' + a_0 a_1 \Delta]_{\xi=1} = 0, \tag{4}$$

где

$$\Delta = \psi\psi''\psi^{IV} + 2\psi'\psi''\psi''' - (\psi'')^3 - \psi(\psi''')^2 - (\psi')^2\psi^{IV}$$

(штрихами обозначены производные по аргументу ξ).

Из тождества (4) в частных случаях получаем характеристические уравнения для трубопроводов с жестко защемленными концами ($a_0 = a_1 = \infty$), с одним концом, жестко защемленным, и другим — шарнирно опертым ($a_0 = \infty$, $a_1 = 0$) и двумя шарнирно опертыми концами ($a_0 = 0$, $a_1 = a$).

Эти уравнения имеют соответственно вид

$$[\Delta]_{\xi=1}=0, \quad [\Delta']_{\xi=1}=0, \quad [\Delta'']_{\xi=1}=0. \tag{5}$$

Соотношения (4), (5) для кругового трубопровода установлены впервые. Они аналогичны известным формулам для прямолинейных стержней.

Для получения качественных выводов о влиянии направления потока на малые колебания и устойчивость трубопровода представим функцию $\psi(\xi)$ в замкнутой форме

$$\psi(\xi)=\sum_{k=1}^{6}\frac{e^{s_k\xi}}{P_6'(s_k)}, \tag{6}$$

где s_k $(k=1,\ 2, \ldots 6)$ — корни соответствующего характеристического уравнения

$$s^6-\beta s^4-\gamma s^3-\alpha s^2-\varepsilon s-\eta=0, \tag{7}$$

причем

$$P_6(s_k)=(s-s_1)(s-s_2)\ \ldots\ (s-s_6).$$

При изменении направления скорости потока на противоположное (замена параметра $\delta>0$ на $\delta<0$ или наоборот) коэффициенты при нечетных степенях параметра s в уравнении (7) меняют знаки на противоположные, а при четных — остаются такими же. При этом, как нетрудно убедиться, все корни s_k, оставаясь неизменными по абсолютной величине, меняют знаки на противоположные. Учитывая, кроме того, что $\sum\limits_{k=1}^{6}s_k=0$, после подстановки соотношения (6) в первое из соотношений (5) убеждаемся, что $\Delta(-\delta)\equiv-\Delta(\delta)$. Отсюда следует также, что $\omega'(-\delta)\equiv-\omega'(\delta)$, $\Delta''(-\delta)\equiv-\Delta(\delta)$ и $\Phi(-\delta)\equiv-\Phi(\delta)$.

Таким образом, при изменении знака параметра скорости на противоположный характеристическое уравнение (4) краевой задачи (1), (2) не изменяется, что свидетельствует о независимости динамических характеристик кругового трубопровода с упруго защемленными концами от направления потока жидкости при любых значениях других параметров задачи. Этот факт (очевидный при $a_0=a_1$) имеет место и при $a_0\neq a_1$, в том числе и тогда, когда один конец трубопровода жестко защемлен, а другой шарнирно оперт.

Отметим, что полученный вывод, по-видимому, имеет место только для краевых условий вида (2). В других случаях динамические характеристики будут зависеть от направления потока жидкости, как и в аналогичной задаче для прямолинейного трубопровода [4].

1. *Доценко П. Д.* Об уравнениях малых колебаний криволинейного трубопровода.— Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1974, № 5, с. 104—112.
2. *Держбин В. С., Доценко П. Д.* О колебаниях трубопровода постоянной кривизны.— Прикл. механика, 1975, 11 № 1, с. 31—36.
3. *Зорій Л. М.* Про одне зображення характеристичних рівнянь деяких крайових задач для систем з розподіленими параметрами.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1968, № 12, с. 1072—1075.
4. *Зорий Л. М., Теребушко И. И.* О применении метода характеристических рядов к качественному исследованию динамики упругих трубопроводов.—Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 11, с. 115—117.

Вычислительный центр Института прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 19.07.78