УДК 539.377

Р. Н. Швец

О ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПАХ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Вариационные принципы для задач динамической термоупругости как граничных задач рассматривались в работах [3, 5], а как начально-граничных — в работах [1, 4]. Ниже приведена формулировка вариационных теорем для задач с неоднородными начальными условиями.

Рассмотрим в трехмерном упругом пространстве область V, ограниченную поверхностью Σ с единичной нормалью $\vec{n}$. Термомеханическое состояние рассматриваемого твердого тела при воздействии силовых и тепловых факторов описываем в области V при $\tau > 0$ уравнениями движения

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial \tau^2} \quad (i, j = 1, 2, 3), \tag{1}$$

уравнениями теплопроводности

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \operatorname{div} \vec{S} + \frac{\tilde{W}}{T_0} = 0, \quad \frac{T_0}{\lambda} \frac{\partial \vec{S}}{\partial \tau} + \operatorname{grad} t = 0; \tag{2}$$

в области $V + \Sigma$ при $\tau \geqslant 0$ — физическими и геометрическими соотношениями

$$\frac{\partial f}{\partial e_{ij}} = \sigma_{ij}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right); \tag{3}$$

в области V при $\tau = 0$ —

$$u_i(x, 0) = u_i^0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial \tau} = v_i^0, \tag{4}$$

$$t(x, 0) = t_0, \tag{5}$$

и на поверхности Σ —

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma_i = \bar{p}_i \ \text{на} \ \Sigma_\sigma, \quad u_i = \bar{u}_i \ \text{на} \ \Sigma_u, \quad (\Sigma = \Sigma_\sigma + \Sigma_u),$$
$$\frac{T_0}{\lambda} \vec{n} \frac{\partial \vec{S}}{\partial \tau} + (t_c - t) = 0 \ \text{на} \ \Sigma_n, \tag{6}$$

$$t = \bar{t} \ \text{на} \ \Sigma_t (\Sigma = \Sigma_n + \Sigma_t), \tag{7}$$

где $f(e_{ij}, t)$ — свободная энергия [3]; $\vec{S}$ — вектор притока энтропии; T_0 — абсолютная температура; t — приращение температуры; λ — коэффициент теплопроводности; u_i — компоненты вектора перемещения; e_{ij}, σ_{ij} — компоненты тензора деформации и напряжения; F_i — компоненты вектора объемных сил; $W_0 = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tau}$ — плотность источника тепла.

Если продолжить [2] функции u_i, F_i и t, W_0 нулями при $\tau < 0$, положив

$$\Psi_i = \begin{cases} \psi_i, & \tau \geqslant 0, \\ 0, & \tau < 0, \end{cases} \tag{8}$$

то начальные возмущения u_i^0, v_i^0 для уравнения (1), а t_0 для уравнения (2) будут играть соответственно роль мгновенных источников $u_i^0 \delta'(\tau) + v_i^0 \delta(\tau)$ и $t_0 \delta(\tau)$, где $\delta(\tau)$ — функция Дирака. В этом случае уравнения (1), (2) запишутся в виде

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i^* = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial \tau^2}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \operatorname{div} \vec{S} + \frac{W^*}{T_0} = 0, \quad \frac{T_0}{\lambda} \frac{\partial \vec{S}}{\partial \tau} + \operatorname{grad} t = 0, \tag{10}$$

где источники заданы обобщенными функциями

$$F_i^* = F_i + \rho u_i^0 \delta'(\tau) + \rho v_i^0 \delta(\tau), \tag{11}$$

$$W^* = \bar{W} + t_0 S_+(\tau), \quad S_+(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \geqslant 0, \\ 0, & \tau < 0. \end{cases} \tag{12}$$

Таким образом, имеем граничную задачу (9), (10), (3), (6), (7) термоупругости в области V, решение которой необходимо искать в классе обобщенных функций. Приведенная граничная задача (9), (10), (3), (6), (7) эквивалентна вариационному уравнению

$$\delta \left\{ \int_V f_0 dV - \int_{\Sigma_\sigma} \bar{p}_i u_i d\Sigma - \int_{\Sigma_u} \sigma_i (u_i - \bar{u}_i) d\Sigma - \int_{\Sigma} (\vec{n} \cdot \vec{S}) t d\Sigma + \right.$$

$$\left. + \int_{\Sigma_t} (\vec{n} \cdot \vec{S}) t d\Sigma + \int_{\Sigma_n} \frac{T_0}{2\lambda} \frac{\partial}{\partial \tau} (\vec{n} - \vec{S})^2 d\Sigma + \int_{\Sigma_n} (\vec{n} \cdot \vec{S}) t_c d\Sigma \right\} = 0, \tag{13}$$

если величины u_i, e_{ij}, σ_{ij}, $\vec{S}$ и t — независимые переменные, а их вариации произвольны. Здесь

$$f_0 = f(e_{ij}, t) - F_i^* u_i + \sigma_{ij} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - e_{ij} \right] + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial \tau^2} \right)^2 +$$

$$+ \frac{T_0}{2\lambda} \frac{\partial \vec{S}^2}{\partial \tau} + \operatorname{grad} t \cdot \vec{S} + \frac{W^*}{T_0} t. \tag{14}$$

Вариационный принцип, записанный уравнением (13), является достаточно полным, но не экстремальным и выражает лишь условие стационарности.

Если ввести обобщенный термодинамический потенциал

$$\Phi_0 = -\Phi(e_{ij}, \sigma_{ij}, t) + \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i^* \right) u_i - \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial \tau^2} \right)^2 -$$

$$- \frac{T_0}{2\lambda} \frac{\partial \vec{S}^2}{\partial \tau} - \operatorname{grad} t \cdot \vec{S} - \frac{W^*}{T_0} t,$$

то вариационное уравнение

$$\delta \left\{ \int_V G_0 dV - \int_{\Sigma_n} \sigma_i \bar{u}_i d\Sigma - \int_{\Sigma_\sigma} (\sigma_i - \bar{p}_i) u_i d\Sigma + \int_{\Sigma} (\vec{n} \cdot \vec{S}) t d\Sigma - \right.$$

$$\left. - \int_{\Sigma_t} (\vec{n} \cdot \vec{S}) d\Sigma - \int_{\Sigma_n} \frac{T_0}{2\lambda} \frac{\partial}{\partial \tau} (\vec{n} \cdot \vec{S})^2 d\Sigma - \int_{\Sigma_n} (\vec{n} \cdot \vec{S}) t_c d\Sigma \right\} = 0 \tag{15}$$

эквивалентно уравнениям сформулированной граничной задачи, если вариации δu_i, δe_{ij}, $\delta \sigma_{ij}$, $d\vec{S}$, δt независимы. Здесь $G(e_{ij}, \sigma_{ij}, t) = f(e_{ij}, t) - \sigma_{ij} e_{ij}$. Вариационное уравнение (15) также выражает условие стационарности некоторого функционала.

1. *Айнола Л. Я.* Вариационный принцип динамики линейной теории упругости.— Докл. АН СССР. Сер. физ.-мат., 1967, **172**, № 2, с. 306—308.
2. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1971.— 512 с.
3. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек.—Киев: Наук. думка, 1978.— 344 с.
4. *Gurtin M. E.* Variational principles for linaer elastodynamics.— Arch. Ration. Mech. and Anal., 1964, **20**, N 3, p. 34—49.
5. *Fu Geo Lin.* Generalized variational principles in thermoelasticity.— Scient ea Sinica, 1964, **13**, N 9, p. 1507—1509.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
24.12.78