3. *Крылов В. И., Скобля Н. С.* Об условиях сходимости и оценке погрешности приближенного обращения преобразования Лапласа при помощи рядов Фурье.— Докл. АН БССР, 1967, 11, № 9, с. 763—766.
4. *Крылов В. И., Скобля Н. С.* Замечание о сходимости и оценке погрешности приближенного обращения преобразования Лапласа при помощи ортогональных многочленов Лежандра и Якоби.— Докл. АН БССР, 1967, 11, № 10, с. 863—866.
5. *Лернер Д. М., Лернер Г. М.* Упрощенный алгоритм обратного преобразования Лапласа.— Радиофизика, 1970, 13, № 4, с. 618—621.
6. *Побережный О. В., Пяныло Я. Д.* Об использовании численного обращения преобразования Лапласа к нестационарным задачам термоупругости для тел с трещинами.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 8, с. 45—48.
7. *Цирулис Т. Т., Белов М. А.* Асимптотические методы исследования схемы Папулиса для приближенного обращения преобразования Лапласа.— Учен. зап. Латв. ун-та, 1973, № 292, с. 139—154.
8. *Piessens R. A.* Bibliography on numerical inversion of the Laplace transform and applications.— J. Comput. and Appl. Math., 1975, 1, N 2, p. 115—128.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
07.02.79

УДК 531.12

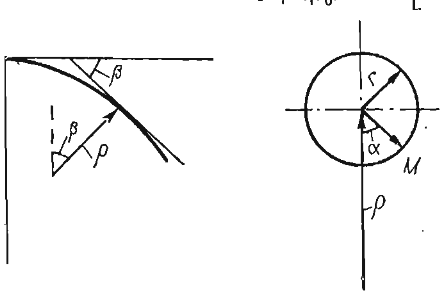
Ю. И. Сикорский, Э. Н. Сокол

ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В КРИВОЛИНЕЙНОМ ТРУБОПРОВОДЕ, РАСПОЛОЖЕННОМ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Линеаризованные дифференциальные уравнения движения материальной точки в расположенном в вертикальной плоскости криволинейном трубопроводе при условии, что сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости, имеют вид [2]

$$\beta = \frac{v_0}{\rho(1+\eta v_0 t)}, \tag{1}$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{\eta v_0}{1+\eta v_0 t}\dot{\alpha} + \left[\omega^2 - \frac{v_0^2}{\rho r(1+\eta v_0 t)^2}\right]\alpha = 0, \tag{2}$$



где β, α — обобщенные координаты (см. рисунок); v_0 — начальная скорость движения материальной точки; ρ — переменный радиус кривизны линии, на которой находятся центры поперечных сечений трубопровода; r — радиус внутренней окружности поперечного сечения криволинейного трубопровода; η — коэффициент, учитывающий сопротивление среды; g — ускорение силы тяжести; $\omega^2 = \frac{g}{r}$.

Первое уравнение с отделяющимися переменными, а второе после подстановки

$$x = \frac{\omega}{\eta v_0}(1+\eta v_0 t) \tag{3}$$

приводится к однородному уравнению с переменными коэффициентами

$$x^2\alpha'' + x\alpha' + \left(x^2 - \frac{1}{\eta^2\rho r}\right)\alpha = 0. \tag{4}$$

Интегрируя уравнения (1), получаем

$$\int_0^\beta \rho\, d\beta = \frac{1}{\eta}\ln(1+\eta v_0 t). \tag{5}$$

Для интегрирования (4) необходимо задать конкретное значение радиуса кривизны. Пусть

$$\rho = \frac{C}{\sqrt{2C\beta}} \quad (C \text{ — параметр кривой}), \tag{6}$$

т. е. трубопровод выполнен в форме спиральной радиоиды. Тогда

$$x^2\alpha'' + x\alpha' + \left(x^2 - \frac{1}{\eta^2 Cr}\sqrt{2C\beta}\right)\alpha = 0. \tag{7}$$

Из равенства (6) следует, что

$$\int\limits_0^\beta \rho d\beta = \frac{2C}{\sqrt{2C}}\beta^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Приравнивая соотношения (5) и (8), получаем

$$\beta = \frac{1}{2C\eta^2}\ln^2(1 + \eta v_0 t). \tag{9}$$

С учетом этого выражение (7) принимает вид

$$x^2\alpha'' + x\alpha' + \left(x^2 - A\ln\frac{x}{x_0}\right)\alpha = 0, \tag{10}$$

где

$$A = \frac{1}{\eta^3 Cr}; \quad x_0 = \frac{\omega}{\eta v_0}.$$

Разложив $\ln\frac{x}{x_0}$ в ряд и использовав несколько членов ряда, получим

$$x^2\alpha'' + x\alpha' + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3)\alpha = 0, \tag{11}$$

где

$$b_0 = \frac{11}{6}A; \quad b_1 = -\frac{3}{x_0}A; \quad b_2 = \frac{3}{2x_0^2}A + 1; \quad b_3 = -\frac{1}{3x_0^3}A.$$

Решение (11) ищем в виде [1]

$$\alpha = x^m\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n. \tag{12}$$

Подставляя равенство (12) в (11), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty}(m+n)^2 C_n x^{m+n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_0 C_n x^{n+m} + \sum_{n=0}^{\infty} b_1 C_n x^{n+m+1} +$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} b_2 C_n x^{n+m+2} + \sum_{n=0}^{\infty} b_3 C_n x^{n+m+3} = 0. \tag{13}$$

Расписывая суммы и группируя члены при одинаковых степенях, для нахождения m, C_0, C_1, ... получаем систему

$$\begin{gathered}
C_0(m^2 + b_0) = 0,\\
C_1[(m+1)^2 + b_0] + C_0 b_1 = 0,\\
C_2[(m+2)^2 + b_0] + C_1 b_1 + C_0 b_2 = 0,\\
C_3[(m+3)^2 + b_0] + C_2 b_1 + C_1 b_2 + C_0 b_3 = 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
C_n[(m+n)^2 + b_0] + C_{n-1}b_1 + C_{n-2}b_2 + C_{n-3}b_3 = 0 \quad (n = 3, 4, \ldots).
\end{gathered} \tag{14}$$

Так как $C_0 \neq 0$, то $m^2 + b_0 = 0$. Отсюда $m_{1,2} = \pm\sqrt{-b_0}$.

Подставляя значения m_1 в (12), находим первое решение (11):

$$\alpha_1 = x^{m_1}\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)} x^n, \tag{15}$$

где коэффициенты $C_1^{(\prime)}$, $C_2^{(\prime)}$, ... находим из (14):

$$C_1^{(\prime)} = -\frac{b_1}{(m+1)^2 + b_0} C_0^{(\prime)}, \ \ldots \tag{16}$$

Аналогично находим

$$\alpha_2 = x^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(2)} x^n. \tag{17}$$

Полученные решения α_1 и α_2 будут линейно независимы, если $m_1 - m_2$ не равно целому числу. Если корни m_1 и m_2 комплексные, то получим комплексные решения α_1 и α_2. Вещественными же решениями является действительная и мнимая части комплексных решений.

Рассмотрим случай комплексных корней. Пусть $m_{1,2} = \pm \mu i$. Поскольку корни комплексные, то коэффициенты C_n, входящие в (12), также будут комплексными, т. е.

$$C_n^{(\prime)} = \delta_n^{(\prime)} + i\gamma_n^{(\prime)}. \tag{18}$$

Следовательно,

$$\alpha_1 = x^{\mu i} \sum_{n=0}^{\infty} (\delta_n^{(\prime)} + i\gamma_n^{(\prime)}) x^n = [\cos(\mu \ln x) + i \sin(\mu \ln x)] \sum_{n=0}^{\infty} (\delta_n^{(\prime)} + i\gamma_n^{(\prime)}) x^n.$$

Отделяя действительную и мнимую части, получаем

$$\alpha_1 = \left[\cos(\mu \ln x) \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^{(\prime)} x^n - \sin(\mu \ln x) \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^{(\prime)} x^n\right] +$$

$$+ i\left[\sin(\mu \ln x) \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^{(\prime)} x^n + \cos(\mu \ln x) \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^{(\prime)} x^n\right] = u_1 + iv_1. \tag{19}$$

Аналогично

$$\alpha_2 = u_2 + iv_2,$$

где

$$u_2 = \cos(\mu \ln x) \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^{(2)} x^n + \sin(\mu \ln x) \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^{(2)} x^n;$$

$$v_2 = \cos(\mu \ln x) \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^{(2)} x^n - \sin(\mu \ln x) \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^{(2)} x^n.$$

Таким образом, u_1, v_1, u_2, v_2 являются решениями дифференциального уравнения (11).

Так как дифференциальное уравнение второго порядка имеет не более двух линейно независимых решений, то в качестве таковых выбираем решения u_1 и v_1 [1]. Следовательно, решение (11) имеет вид

$$\alpha = B_1 u_1 + B_2 v_1, \tag{20}$$

где B_1, B_2 — постоянные, определяемые по начальным условиям.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть $v_0 = 100$ м/с, $r = 1$ м, $\eta = 0{,}01$ м$^{-1}$, $g = 9{,}8$ м/с^2, $C = 2 \cdot 10^6$ м^2. Тогда $b_0 = 0{,}916$, $b_1 = -0{,}15$, $b_2 = 1$, $b_3 = -0{,}00017$, $\mu = 0{,}96$. Определим $\delta_n^{(1)}$ и $\gamma_n^{(1)}$, входящие в u_1 и v_1. Из формул (16) и (18) имеем:

$$\delta_1^{(1)} + i\gamma_1^{(1)} = \frac{0{,}15}{1 + 1{,}92i} (\delta_0^{(1)} + i\gamma_0^{(1)}). \tag{21}$$

Так как $\delta_0^{(1)}$ и $\gamma_0^{(1)}$ — произвольные постоянные, то для удобства положим $\delta_0^{(1)} = 1$, $\gamma_0^{(1)} = 0$. Тогда (21) запишется так:

$$\delta_1^{(1)} + \gamma_1^{(1)} = 0{,}03200 - 0{,}06145i.$$

t, с	Аналитический метод	Численный метод	t, с	Аналитический метод	Численный метод
0,0	0,30000	0,30000	1,1	—0,20813	—0,30800
0,1	0,28530	0,28588	1,2	—0,18119	—0,18354
0,2	0,24445	0,24649	1,3	—0,13825	—0,14285
0,3	0,18348	0,18737	1,4	—0,08411	—0,09041
0,4	0,10955	0,11521	1,5	—0,02418	—0,03156
0,5	0,03030	0,03730	1,6	0,03569	0,02797
0,6	—0,04672	—0,03905	1,7	0,08992	0,08260
0,7	—0,11464	—0,10714	1,8	0,13365	0,12741
0,8	—0,16782	—0,16129	1,9	0,16317	0,15856
0,9	—0,20222	—0,19739	2,0	0,17621	0,17358
1,0	—0,21572	—0,21310	2,1	0,17209	0,17162

Отсюда

$$\delta_1^{(1)} = 0{,}03200; \quad \gamma_1^{(1)} = -0{,}06145$$

Аналогично

$$\delta_2^{(1)} = -0{,}13062, \quad \gamma_2^{(1)} = 0{,}12309,$$

$$\delta_3^{(1)} = -0{,}00002, \quad \gamma_3^{(1)} = 0{,}00898,$$

$$\delta_4^{(1)} = 0{,}00366, \quad \gamma_4^{(1)} = -0{,}00937,$$

$$\delta_5^{(1)} = -0{,}00011, \quad \gamma_5^{(1)} = -0{,}00036 \text{ и т. д.}$$

Всего найдено 29 значений $\delta_n^{(1)}$ и $\gamma_n^{(1)}$. Вычисления, проведенные на кафедре вычислительной математики Львовского университета инженером М. А. Дзындрой, показали, что такого количества членов ряда достаточно для обеспечения заданной точности. Постоянные $B_1 = -0{,}4439$, $B_2 = 0{,}3582$ находились для начальных условий $t = 0$, $\alpha_0 = 0{,}3$ рад, $\alpha_0 = 0$.

В таблице приведены результаты вычислений аналитическим (когда решение представлено рядом) и численным методами.

1. *Латышева К. Я., Терещенко Н. И.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений и их приложения.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1970.— 393 с.
2. *Сокол Э. Н.* Движение материальной точки в криволинейном трубопроводе с учетом сил сопротивления.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 8, с. 124—127.

Киевское высшее военное инженерное училище связи
Украинский научно-исследовательский геолого-разведочный институт

Поступила в редколлегию 19.07.78

УДК 539.377

Г. С. Кит, И. П. Лысый

ВЛИЯНИЕ ИСТОЧНИКА ТЕПЛА НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛОСЫ С ТРЕЩИНОЙ

Пусть упругая бесконечная полоса шириной $2d$, в которой имеется теплоизолированная трещина длиной $2l$, расположенная на средней линии полосы, нагревается стационарным источником тепла мощности W. Предположим, что на гранях полосы, свободных от внешних усилий, заданы температурные условия первого, второго или третьего рода.

Температуру $T(x, y)$ представим в виде двух слагаемых:

$$T(x, y) = t^*(x, y) + t(x, y). \tag{1}$$

Здесь $t^*(x, y)$ — основное температурное поле в сплошной полосе с источником тепла, размещенным в точке $A(b, c)$, которое определяем из уравне-